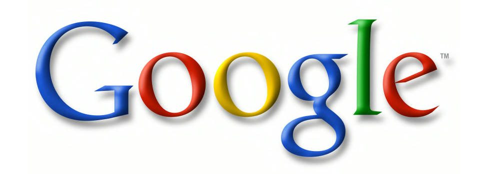




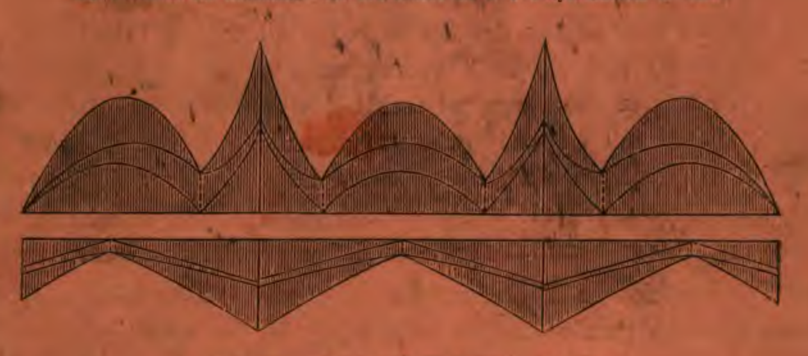
Der

BRÜCKENBAU.

Herausgegeben von

Dr. **E. Winkler.**

ord. Professor für Eisenbahn- und Brückenbau am k. k. Polytechnikum in Wien.



Theorie der Brücken.

I. Heft. Aeussere Kräfte gerader Träger.

Lieferung I.

Mit 74 Holzschnitten und 1 lithogr. Tafel.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1872.

Vorbemerkung.

Obwohl es anfangs in der Absicht des Verfassers lag, zunächst den constructiven Theil des Brückenbaues im Drucke erscheinen zu lassen, weil sich seine Vorträge am Polytechnikum in Wien nur auf diesen Theil erstrecken sollen, so stellte sich doch bald heraus, dass hierbei eine so grosse Menge theoretischer Resultate nöthig wurde, dass die gleichzeitige Drucklegung des theoretischen Theiles zweckmässig erschien. Auch wurde er hierzu von einigen Fachgenossen aufgemuntert.

Bei der Behandlung des Stoffes sollen diejenigen Kenntnisse aus der Mathematik und Mechanik vorausgesetzt werden, wie sie von den Hörern der letzten Jahrgänge polytechnischer Anstalten gefordert werden können. Hierbei soll die analytische und graphische Methode in möglichst gleichem Maasse Anwendung finden, da es die Ansicht des Verfassers ist, dass unter Umständen jede dieser Methoden von Werth sein kann, worüber er sich in der Vorrede zum ersten Hefte noch näher aussprechen wird.

Das zunächst in 2 Lieferungen erscheinende erste Heft wird die äusseren Kräfte gerader Träger behandeln. In der vorliegenden ersten Lieferung bilden die Kapitel II, III, VI, VII, VIII, IX und X eine verbesserte Auflage der im Jahrgange 1870 der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines veröffentlichten Abhandlung: „Die äusseren Kräfte gerader Träger“. Zu bemerken ist hierzu nur, dass namentlich die Tabellen zu den continuirlichen Trägern neu berechnet und hierdurch mehrere Fehler berichtigt wurden. Die Kapitel I, IV und V wurden neu hinzugefügt.

WIEN, im April 1872.

E. Winkler.





EINLEITUNG.

§. 1. **Aufgabe der Theorie der Brücken.** Die Theorie der Brücken hat sich insbesondere mit einer derartigen Bestimmung der Stärken ihrer Theile zu befassen, dass die Brücke im Stande ist, die Verkehrslasten mit genügender Sicherheit zu tragen. Hierzu ist zunächst eine Bestimmung der auf die Brückentheile wirkenden äusseren Kräfte, sodann aber eine Ermittelung der von diesen abhängenden inneren Kräfte oder Spannungen erforderlich. Im Zusammenhange hiermit ist die Untersuchung über die möglichst rationelle Anordnung, also namentlich über die Anordnung, welche das Minimum der Kosten erheischt. Von geringerer Wichtigkeit ist im Allgemeinen die Bestimmung der unter der Wirkung der Belastung eintretenden Formänderung oder Durchbiegung.

Jede Brücke besteht aus drei Haupttheilen, nämlich der Bahn, dem Tragwerke und den Pfeilern. Die Bahn steht durch Nebenträger mit dem Tragwerke oder den Hauptträgern in Verbindung, so dass wir es in theoretischer Beziehung hauptsächlich mit Trägern überhaupt zu thun haben; ausserdem werden wir aber auch die Theorie der Pfeiler in das Bereich unserer Untersuchungen ziehen.

Bei unseren theoretischen Untersuchungen setzen wir ausser der Kenntniss der Mathematik die Kenntniss der Lehre der Mechanik und insbesondere der allgemeinen Elasticitäts- und Festigkeitslehre voraus. Beziehen werden wir uns hierbei auf unsere „Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag, 1868". Die Theorie lässt sich entweder in analytischer oder in geometrischer oder in gemischter Form behandeln. Wir werden im Allgemeinen sowohl der analytischen, als der geometrischen Form Rechnung tragen, und nur in Fällen, wo die eine der Methoden unserer Meinung nach entschieden den Vorzug verdient, nur diese wählen. Der hier und da ausgesprochenen Meinung, dass durchgängig entweder nur der einen oder der anderen der Vorzug einzuräumen sei, können wir uns nicht anschliessen.

Obwohl wir, wie bemerkt, die Grundlehren der Mechanik voraussetzen müssen, so sind doch im Folgenden diejenigen Regeln der Mechanik zusammengestellt, welche als Grundlage für die geometrische Behandlung der Statik oder der sogenannten graphischen Statik dienen, weil dieselben zuweilen noch nicht in den Vorträgen oder Lehrbüchern über Mechanik genügend gewürdigt sind.

§. 2. **Grundzüge für die graphische Behandlung.** Alle Regeln der Statik werden aus dem Grundsatze abgeleitet, welcher die Zusammensetzung zweier Kräfte lehrt: dem Satze vom Parallelogramme der

Kräfte. Da sich nach diesem Satze die Zusammensetzung zweier Kräfte und die Zerlegung einer Kraft durch eine geometrische Construction ausführen lässt, so muss es auch möglich sein, alle Regeln der Statik auf geometrischem Wege abzuleiten.

Die aus dem Satze vom Parallelogramme der Kräfte abgeleiteten Regeln, welche hierbei besonders gute Dienste leisten, sind folgende, wobei wir uns auf Kräfte in der Ebene beschränken:

1. Wenn beliebig viele auf einen Körper wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, so lassen sich die Kräfte zu einem Polygone, dem Kräftepolygone, an einander reihen (Fig. 1). Die Reihenfolge der Aneinanderreihung ist dabei gleichgiltig.

2. An einem geschlossenen Seile mögen beliebig viele im Gleichgewichte befindliche Kräfte P_1, P_2, P_3 .... wirken. Das Polygon, zu welchem sich dieses Seil formt, nennen wir das Seilpolygon. Die Spannungen der einzelnen Seilstücke seien S_1, S_2, S_3 ... Die drei im Punkte A_1 im Gleichgewichte befindlichen Kräfte P_1, S_1, S_5 lassen sich zu einem Dreiecke OB_1B_5 zusammensetzen. Ebenso lassen sich die drei im Punkte A_2 im Gleichgewichte befindlichen Kräfte zu einem Dreiecke OB_1B_2 zusammensetzen, welches mit dem vorigen die Seite $OB_1 = S_1$ gemein hat, so dass beide Dreiecke zu einem Viereck $OB_5B_1B_2$ aneinandergesetzt werden können u. s. w. Man gelangt so zu dem Satze:

Fig. 1.

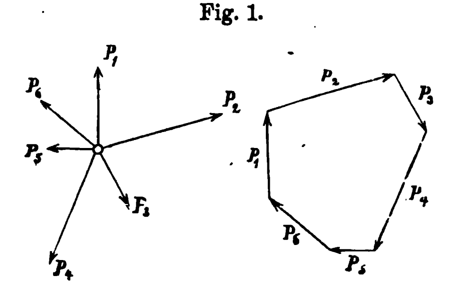
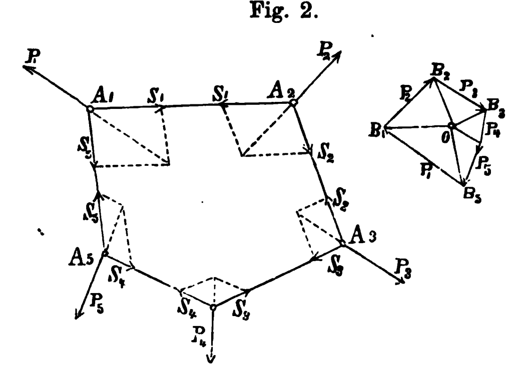


Fig. 2.



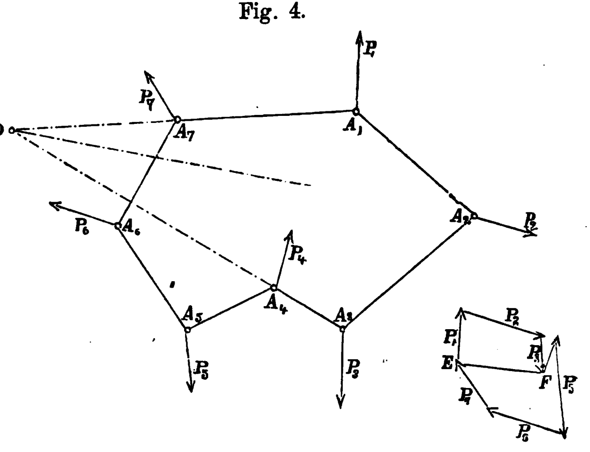
Wenn Kräfte P_1, P_2, P_3 ... am Seilpolygone im Gleichgewichte sind, so lassen sich die Spannungen der Seilstücke nach Grösse und Richtung darstellen durch Gerade, welche einen Punkt O mit den Ecken des Kräftepolygons verbinden. Wir nennen den Punkt O den Pol und die von ihm ausgehenden Geraden die Strahlen.

Wenn die Kräfte parallel wirken, wobei sie, damit Gleichgewicht stattfinden könne, zum Theil nach entgegengesetzten Richtungen wirken müssen, so geht das Kräftepolygon in eine Gerade über (Fig. 3). In diesem Falle müssen für das Gleichgewicht jeder Ecke des Seilpolygons, die senkrecht zu den äusseren Kräften wirkenden Componenten der Seil-

spannungen gleich sein, woraus folgt: Die senkrecht zu den äusseren Kräften wirkenden Componenten der Seilspannungen sind constant. Bei vertical wirkenden Kräften nennt man diese constanten, horizontal wirkenden Componenten einfach die Horizontalspannung. Die Horizontalspannung ist offenbar gleich dem normalen Abstande OC des Poles O von der Kraftlinie oder gleich der Poldistanz.

3. Damit ein beliebiger Theil $A_4 A_5 A_6 A_7$ (Fig. 4) des Seiles im Gleichgewichte ist, müssen die Spannungen S_3, S_7 der an den Enden A_4, A_7 dieses Seiltheiles wirkenden Spannungen mit den an demselben wirkenden Kräften P_4, P_4, P_6 oder mit deren Resultante R im Gleichgewichte sein, der Durchschnitt der Richtung von S_3, S_7 muss also in der Richtung dieser Resultante liegen. Hieraus folgt: Die Mittelkraft R aller zwischen zwei Seiten des Seilpolygons wirkenden Kräfte geht durch den Durchschnittspunkt der Verlängerungen dieser Seiten.

Fig. 4.



Die Grösse und Richtung der Mittelkraft R selbst ist durch die Diagonale EF des Kräftepolygons bestimmt, weil R mit P_4, P_5, P_6, P_7 ein geschlossenes Polygon bilden muss.

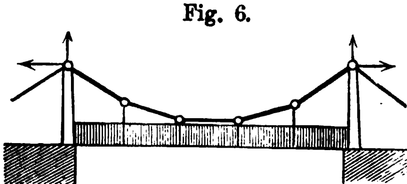
4. Kräfte, welche an einem Körper wirken, sind nur dann im Gleichgewichte, wenn *a)* sich dieselben nach Grösse und Richtung zu einem Polygone vereinigen lassen, und *b)* wenn ausserdem zwischen ihren Richtungen ein entsprechendes Seilpolygon möglich ist; denn nur wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, ist *a)* jede Kraft gleich und entgegengesetzt der Resultante aller übrigen Kräfte, so dass eine Verschiebung unmöglich ist, und *b)* fällt

jede Kraft mit der Resultante der übrigen in eine einzige Gerade, so dass eine Drehung unmöglich ist.

§. 3. Einfache Trägersysteme. Wir können drei verschiedene Trägersysteme unterscheiden, je nachdem im Träger gleichzeitig Zug- und Druckfestigkeit, oder nur Zugfestigkeit oder nur Druckfestigkeit beansprucht wird.

1. Die Träger des ersten Systems haben eine gerade Axe oder eine von einer Geraden wenig abweichende Axe und werden nur durch Verticalkräfte beansprucht (Fig. 5). Wir nennen sie gerade Träger; sie heissen auch wohl gestreckte Träger, Balkenträger oder Balken. Man kann dieselben wiederum in volle und durchbrochene oder in massive Träger und Gitterträger theilen.

Fig. 5.

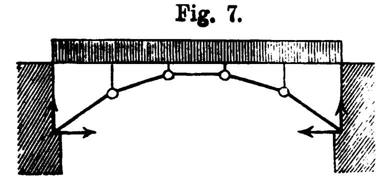


2. Die nur auf Zugfestigkeit beanspruchten Träger haben eine nach unten gekrümmte Form und haben ausser der verticalen Belastung und den verticalen Stützendrücken an den Enden einen nach aussen gerichteten Horizontalzug aufzunehmen. Man nennt sie im Allgemeinen Hängewerksträger.

Fig. 6.

3. Die nur auf Druckfestigkeit beanspruchten Träger haben eine nach oben gekrümmte Form und haben ausser der verticalen Belastung und den verticalen Stützendrücken an den Enden oder Kämpfern einen nach innen gerichteten Horizontalschub aufzunehmen. Man nennt sie im Allgemeinen Sprengwerksträger, wenn sie continuirlich gekrümmt sind, auch Bogenträger.

Fig. 7.



Für die geraden Träger wird sowohl Holz, als Guss- und Schmiedeeisen verwendet; für die Hängewerksträger kommt fast nur Schmiedeeisen in Anwendung, während die Sprengwerksträger aus Holz, Stein, Guss- und Schmiedeeisen construirt werden.

Die Hänge- und Sprengwerke sind einander entgegengesetzt; in der Theorie lassen sie sich im Allgemeinen gemeinschaftlich behandeln, indem sie sich hierin nur durch entgegengesetzte Vorzeichen unterscheiden. Dennoch findet zwischen ihnen ein grosser Unterschied hinsichtlich der Stabilität statt. Einer gegebenen Belastungsweise entspricht nämlich für den Zustand des Gleichgewichtes eine ganz bestimmte Form des Hänge- oder Sprengwerkes, falls dasselbe aus einzelnen gelenkartig mit einander verbundenen Theilen besteht. Aendert sich die Belastungsweise, was in der That eintritt, so

nimmt das Hängewerk auch eine andere Form an; das Sprengwerk dagegen hat die Tendenz, in die entgegensetzte Lage umzuschlagen und stürzt dadurch zusammen. Das Hängewerk ist also im stabilen, das Sprengwerk nur im labilen Gleichgewichte.

Um das Sprengwerk gegen das Einstürzen bei Aenderung der Belastungsweise zu schützen, sind besondere Constructionen, sogenannte Versteifungsconstructionen nothwendig. Das Hängewerk bedarf zu seiner Existenz solcher Versteifungen nicht; will man indess die Formänderung desselben oder das Schwanken mässigen, was z. B. für Eisenbahnbrücken nöthig ist, so muss man auch hier Versteifungen anwenden und kann daher schlaffe Hängewerksträger und versteifte Hängewerksträger unterscheiden.

§. 4. Combinirte Trägersysteme. Die genannten drei einfachen Systeme lassen sich zu drei combinirten Systemen vereinigen, nämlich

Combin. des geraden Trägers mit dem Hängewerke (Fig. 8).
Combin. des geraden Trägers mit dem Sprengwerke (Fig. 9).
Combination des Hänge- und Sprengwerkes (Fig. 10).

Fig. 8.

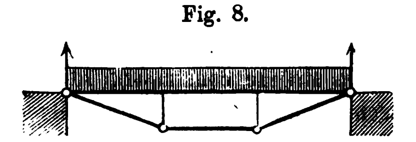
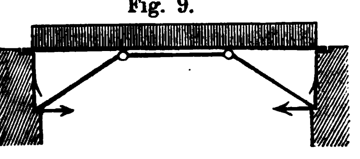
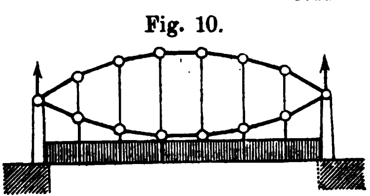


Fig. 9.



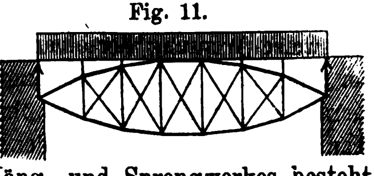
Die beiden ersten Combinationen kommen oft in Anwendung, indem man die geraden Träger als Versteifungsmittel für das Häng- oder Sprengwerk anordnet. Weniger ist die Combination des Häng- und Sprengwerkes üblich.

Fig. 10.



Bei der letzten Combination bietet sich die Möglichkeit, eine Versteifung durch Gitterwerk, welches zwischen b wird, herbeizuführen (Fig. 11). In dieser Form ist diese Combination vielfach zur Anwendung gekommen. Zu dieser Combination gehört auch der Grenzfall, wo der eine beider Theile gerade ist.

Fig. 11.



Der Vortheil der Combination des Häng- und Sprengwerkes besteht hauptsächlich darin, dass durch die Verbindung beider Theile, welche Horizontalkräfte im entgegengesetzten Sinne ausheben, eine Aufhebung dieser Kräfte eintritt, so dass auf die Pfeiler nur ein Verticaldruck wirkt, der wesentlich schwächere Pfeiler erfordert. In Folge dessen kann man diese Combination, falls zwischen beiden Theilen Gitterwerk eingeschaltet ist, auch als geraden Träger auffassen. Wir werden dies in der Folge

auch thun, indem wir gerade Träger mit geraden und gekrümmten Gurten unterscheiden.

Ausserdem kommen auch Träger in Anwendung, welche aus einer Combination verschiedener Arten ein und desselben einfachen Systemes bestehen.

I. Kapitel.

Belastung der Brücken.

§. 5. **Kräfte, welche die Brücken beanspruchen.** Die Kräfte, welche die Brücken beanspruchen, welche also bei der Theorie in Berücksichtigung kommen, sind:

1. Das Eigengewicht der Brücke. Dasselbe ist vor der Construction der Brücke nicht bekannt, da es ja von den durch die Rechnung zu bestimmenden Stärken der Theile abhängt. Wollte man das Eigengewicht bei der Berechnung als Unbekannte und zwar als eine Function der zu berechnenden Stärken einführen, so würde die Berechnung sehr weitläufig, ja selbst unmöglich werden. Es ist daher allgemein üblich, das Eigengewicht im Voraus nach Massgabe bereits ausgeführter Brücken approximativ anzunehmen. Ist hiernach die Brücke construirt, so ist es möglich, das Gewicht genauer zu berechnen und jetzt nöthigenfalls die Bestimmung der Stärken noch einmal vorzunehmen. Regeln für die vorläufige Annahme des Eigengewichtes werden wir erst im constructiven Theile des Brückenbaues entwickeln.

2. Die zufällige Last oder Verkehrslast, welche durch den Zweck der Brücke bestimmt ist. In der Theorie ist zu berücksichtigen, dass diese Last eine sehr verschiedene Lage annehmen kann, ja dass sie in mehreren Theilen auftreten kann. Es ist daher eine wichtige Aufgabe der Theorie, die gefährlichste Belastungsweise zu ermitteln, d. i. diejenige, für welche die Beanspruchung am grössten wird.

Die zufällige Last ist im Allgemeinen in Bewegung, so dass eine stossweise Wirkung derselben oder in Verbindung mit der Durchbiegung der Träger, eine Vergrösserung des Druckes eintritt. Man pflegt indess hierauf in der Rechnung gewöhnlich nicht Rücksicht zu nehmen, indem man für die Bestimmung der Stärken einen so grossen Sicherheitsgrad wählt, dass hierdurch dieser Vergrösserung der Beanspruchung Rechnung getragen wird. Auf die Feststellung dieser zulässigen Beanspruchung des Materiales mit Rücksicht auf den eben erwähnten Umstand werden wir erst im constructiven Theile eingehen.

3. Horizontalkräfte, welche in Folge des Windes und der Seitenschwankungen der die Brücke passirenden Wagen entstehen. Bei Brücken, welche in Curven liegen, kann noch die Centrifugalkraft hinzutreten.

4. Pfeilerdrücke. Die genannten Kräfte erzeugen an den Auflagestellen Reactionen oder Pfeilerdrücke, die natürlich in der Theorie ebenfalls als Kräfte, welche die Träger beanspruchen, aufzunehmen sind. Bei den geraden Trägern wirken diese Drücke in verticaler Richtung, während sie bei Häng- und Sprengwerken schief wirken.

Wir werden in der Folge das Eigengewicht pro Längeneinheit mit g, die zufällige Last pro Längeneinheit, falls sie als gleichförmig vertheilt anzunehmen ist, mit p, und die Gesammtlast pro Längeneinheit, d. i. $g + p$, mit q bezeichnen. Die Pfeilerdrücke bezeichnen wir im Allgemeinen mit D.

§. 6. **Belastung der Strassenbrücken.** Die grösste Belastung tritt ein, wenn die Brücke ganz mit Menschen oder mit Wagen besetzt ist.

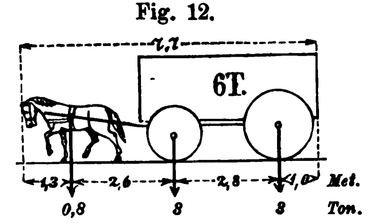
Je nach der Dichtigkeit des Menschengedränges gehen auf *1 □ Meter 5 bis 6 Mann.* Rechnen wir einen Mann zu *70 Kilogr.*, so ist Belastung:

350 bis 420 Kilogr. pro □ Meter.

Hierbei ist immer noch angenommen, dass die Menschen nur so dicht aneinander stehen, dass noch eine langsame Bewegung möglich ist.

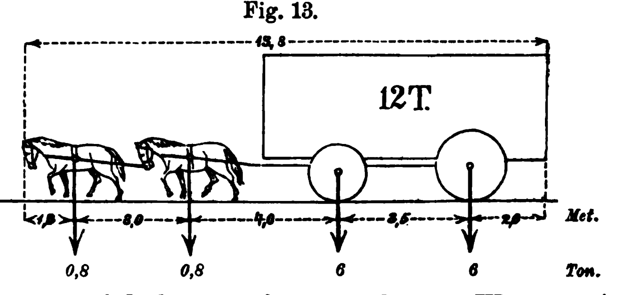
Für Brücken in Landstrassen genügt es, die kleinere Zahl zu nehmen; in Städten wählt man besser die grössere Zahl. Unter Umständen, z. B. wenn die Belastung durch Menschengedränge in der That oft eintritt, kann man die grösste angegebene Belastung noch um *10%* vermehren, also ***460 Kilogr. pro □ Meter*** annehmen.

Fig. 12.



Die Beanspruchung kann aber durch Wagengedränge unter Umständen grösser werden, als durch Menschengedränge. In Fig. 12, 13 und 14 sind die Lastvertheilungen, welche man den Berechnungen zu Grunde legen kann, dargestellt und zwar gilt Fig. 12 für Brücken in gewöhnlichen Erdwegen, Fig. 13 für Brücken in Chausséen und Fig. 14 für Brücken in Städten mit gepflasterten Strassen.

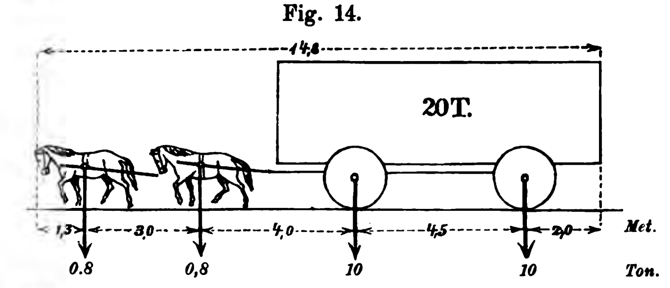
Fig. 13.



Im letzteren Falle genügt es jedoch, nur einen so schweren Wagen und den übrigen Theil der Brücke durch Wagen nach Fig. 13 besetzt anzunehmen. Die Breite eines Wagens kann man *2,5 Meter* annehmen.

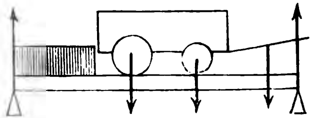
Denkt man sich diese Lasten gleichmässig vertheilt, so ergiebt sich nach Fig. 12 *353 Kilogr. pro ☐ Met.,* nach Fig. 13 *394 Kilogr. pro ☐ Met* und nach Fig. 14 *584 Kilogr. pro ☐ Meter.* Die gleichmässig vertheilten Lasten, welche eine eben so grosse Beanspruchung erzeugen, wie die Wagen, sind indess grösser, als diese Zahlen (vergleiche §. 23).

Fig. 14.



Die Fusswege sind natürlich mit Menschen besetzt anzunehmen. Wenn aber die Fahrbahn breiter ist, als ein oder zwei Wagen, so ist es rathsam, den Rest ebenfalls mit Menschen besetzt anzunehmen. Ebenso kann eine grössere Beanspruchung entstehen, wenn sich hinter einem Wagen Menschen befinden (Fig. 15), als wenn nur die Pferde oder nur die Pferde und eine Achse des nächsten Wagens Platz haben.

Fig. 15.



§. 7. **Belastung der Eisenbahnbrücken.** Die Eisenbahnbrücken nimmt man gewöhnlich mit einem Zuge besetzt an, welcher aus drei hintereinander gehenden Locomotiven nebst Tendern und ausserdem aus schweren Güterwagen besteht. Es kann vorkommen, dass zwei arbeitende Locomotiven den Zug ziehen und eine leergehende Locomotive mitgenommen wird.

Zuweilen nimmt man zwei Locomotiven Brust an Brust an, die eine also verkehrt gehend, weil hierdurch grössere Beanspruchungen entstehen können. Ja man nimmt sogar zuweilen den Zug aus lauter Locomotiven bestehend an, weil sich dieser Fall im Kriege ereignen kann. Indess erscheint es nicht nöthig, auf derartig vereinzelt auftretende Belastungsweisen Rücksicht zu nehmen, auch wenn sie eine etwas grössere Beanspruchung erzeugen (gross ist der Unterschied nicht), weil die Brücke bei der üblichen (5- bis 10fachen) Sicherheit einige Male auch eine grössere Beanspruchung vertragen kann, als bei grösster normaler Belastung.

Bei der Wahl der Locomotive ist zu berücksichtigen, dass die Locomotiven einer Bahn gewöhnlich nicht auf andere Bahnen überzugehen pflegen, so dass es im Allgemeinen genügt, die ungünstigsten Locomotiven derjenigen Bahn vorauszusetzen, für welche die Brücke construirt wird. Allerdings kann im Kriege der Fall eintreten, dass die Locomotiven auch fremde Bahnen befahren. Hierbei aber dürfen diese Locomotiven auch nicht wesentlich schwerer sein, als die Locomotiven der betreffenden Bahn.

weil meist die Stärke des Eisenbahn-Oberbaues nach den schwersten Locomotiven der betreffenden Bahn bemessen ist. So können z. B. die Nebenbahnen einen so schwachen Oberbau haben, dass schwere Locomotiven eine solche Bahn gar nicht ohne Gefahr würden befahren können. Natürlich wird man unter Umständen bei der Wahl der Lasten berücksichtigen müssen, dass eine Vergrösserung des Verkehrs eintreten kann, welche die Anschaffung stärkerer Locomotiven erheischt.

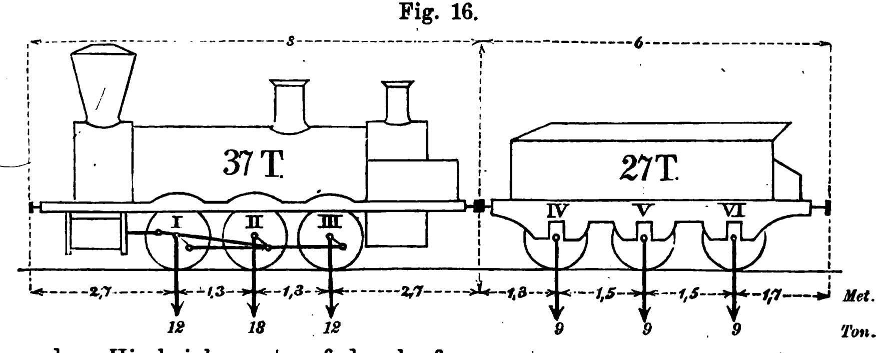
Bestimmte Normen existiren nicht; nur nimmt der Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen als grössten zulässigen Druck pro Achse *13 Tonnen* und als grösstes Ladungsgewicht der Wagen pro Achse *5 Tonnen* an.

Die schwersten Locomotiven mit getrennten Tendern wiegen bei drei Achsen *37 Tonnen,* bei 4 Achsen *48 Tonnen*; die schwersten Tenderlocomotiven etwa *68 Tonnen.* Die schwersten Tender wiegen bei drei Achsen etwa *28 Tonnen.* Der Radstand der Locomotive ist *1,15 bis 2,2 Meter*, er ist hier möglichst klein anzunehmen. Der Druck pro Meter beträgt für Locomotive und Tender bei getrenntem Tender etwa *4,8 Tonnen,* bei Tenderlocomotiven etwa *5,0 Tonnen.*

Der grösste Druck der Lastwagenachsen ist *8 Tonnen* und der kleinste Radstand etwa *3 Meter.*

Für die im Polytechnicum auszuführenden Entwürfe kann beispielsweise die in Fig. 16 und 17 dargestellte Lastvertheilung angenommen

Fig. 16.



werden. Hierbei kommt auf den laufenden Meter eines Geleises für Locomotive und Tender *4,57 Tonnen,* für die Wagen *2,67 Tonnen.* Kommen in Wirklichkeit auch noch etwas grössere Lasten vor, so ist der Unterschied doch gering.

Fig. 17.

Die angegebenen Zahlen gelten nur für Hauptbahnen; für Nebenbahnen mit normaler Spurweite kann man die Längen und Belastungen der Güterwagen ebenso, die Drücke der Locomotive und des Tenders etwa *0,8 mal so gross* annehmen.

Durch die Geschwindigkeit der Züge in Verbindung mit der Durchbiegung der Träger wird der Druck erhöht; jedoch ist die Erhöhung nur eine sehr geringe. Den Einfluss der durch die Bewegung der Züge veranlassten Stösse werden wir bei der Wahl des Sicherheitscoefficienten berücksichtigen.

Bei grösserer Spannweite pflegt man in Deutschland und Frankreich *4 Tonnen pro Meter*, in England *3,3 Tonnen pro Meter* und in Amerika selbst nur *2,5 Tonnen pro Meter* eines Geleises anzunehmen. (Vergl. §. 23 und §. 24.)

§. 8. **Belastung durch Wasser und Schnee.** Der Druck des Wassers, welchen Aquäducte aufzunehmen haben, ist in jedem speciellen Falle leicht zu ermitteln, so dass es nicht nöthig erscheint, besondere Regeln aufzustellen.

Der Druck, welcher durch den Schnee entsteht, ist äusserst verschieden. Im Maximum kann derselbe bei uns zu

80 bis 100 Kilogr. pro □ Meter

angenommen werden.

Man pflegt den Druck des Schnees indess gar nicht zu berücksichtigen, da auf den Brücken der Schnee beseitigt zu werden pflegt, so dass kaum der stärkste Schneedruck mit der grössten Belastung durch Menschengedränge oder durch schwere Wagenzüge zusammenfallen wird. Es ist wohl denkbar, dass sich z. B. bei Feuersgefahr, selbst bei hohem Schnee Menschen- oder Wagengedränge auf der Brücke einstellen kann; allein dann wird der Schnee doch verhindern, dass das Gedränge so dicht wird, wie es den oben angegebenen Normen zu Grunde liegt.

§. 9. **Horizontalkräfte.** Die bereits in §. 5 genannten, auf die Brücke wirkenden Horizontalkräfte sind:

1. Drücke, welche durch die Seitenschwankungen der Wagenzüge entstehen. Leider entziehen sich diese Drücke einer genauen Bestimmung. Nur so viel ist gewiss, dass sie mit zunehmender Last und zunehmender Geschwindigkeit wachsen. Ihr Einfluss ist bisher stets nur schätzungsweise bestimmt worden; wir werden hierauf im constructiven Theile bei den betreffenden Constructionen (Querverbindungen und Windstreben) zurückkommen.

2. Druck des Windes. Der auf die Flächeneinheit wirkende Druck w des Windes ist bei der Geschwindigkeit v desselben

$$w = Av^2,$$

vorausgesetzt, dass der Wind normal auf die Brückenrichtung wirkt. Den Coefficienten A kann man für Tonnen und Meter etwa zu *0,00012* annehmen, so dass

$$\boldsymbol{w = 0{,}00012\, v^2}$$

wird. Hiernach ergiebt sich:

Benennung des Windes	*Geschwindigkeit*	*Druck pro 1 □ Meter*
	Meter	*Tonnen*
Lebhafter Wind	5	0,003
Sehr lebhafter Wind	10	0,012
Starker Wind	15	0,027
Sehr starker Wind	20	0,048
Leichter Sturm	25	0,075
Starker Sturm	30	0,108
Orkan	40	0,192
Stärkst bekannter Orkan . .	48	0,278

Für unsere Gegenden ist es wohl ausreichend, im Maximum

$$w = 0{,}1 \text{ Tonnen pro } \square \text{ Meter}$$

anzunehmen.

Man kann annehmen, dass dem Winde von den Eisenbahnwagen eine Fläche von *4 Meter* Höhe, von den Wagen auf Strassenbrücken eine Fläche von *3 Meter* Höhe geboten wird, so dass der Winddruck auf den Wagenzug bezüglich *0,4* und *0,3 Tonnen pro lauf. Meter* betragen würde. Hierzu kommt natürlich noch der auf die Brücke selbst wirkende Winddruck.

3. Die Centrifugalkraft bei Brücken, welche in Curven liegen, ist bei der zufälligen Last p pro Längeneinheit, der Zuggeschwindigkeit c und dem Radius r auf die Längeneinheit bestimmt durch die Formel:

$$z = \frac{pc^2}{gr},$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Am ungünstigsten wirken die Schnellzüge. Bedeutet p_1 die den Güterzügen entsprechende ideale Verticalbelastung nach §. 7, so kann man für die Personenzüge etwa $p = \frac{3}{4} p_1$ setzen. Setzen wir ausserdem die Beschleunigung der Schwere $g = 9{,}81$ *Meter*, so wird

$$z = 0{,}0764 \frac{p_1 c^2}{r}.$$

Bei den grössten Geschwindigkeiten, welche für einen gegebenen Radius zulässig sind (etwa $c = 18, 14, 10$ *Meter* für $r = 600, 400, 200$ *Meter*) ergiebt sich durchschnittlich

$$z = 0{,}04\, p_1,$$

so dass also dieser Horizontaldruck höchstens auf 4 Procent des grössten Verticaldruckes steigen kann.

I. Abschnitt.

Die äusseren Kräfte gerader Träger.

§. 10. **Einleitung.** Bei den geraden Trägern wirken sämmtliche äussere Kräfte in verticaler Richtung.

Die Spannungen in irgend einem Querschnitte hängen von zwei durch die äusseren Kräfte bedingten Grössen ab: nämlich von der Resultante der auf einer Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte und deren statischen Momente. Die erstere oder die Summe aller auf einer Seite eines Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte nennen wir die Transversalkraft für diesen Querschnitt und bezeichnen dieselbe mit Q Statt dieser Bezeichnung ist auch die Bezeichnung Verticalkraft Schubkraft, scheerende Kraft üblich. Das Moment der Resultante oder die Summe aller Momente der auf einer Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte in Beziehung auf den Querschnitt nennen wir kurz das Moment für diesen Querschnitt und bezeichnen dasselbe mit M Statt dieser Bezeichnung finden wir auch die Bezeichnung Biegungsmoment, Angriffsmoment etc. Beispielsweise sind bei einem Gitterträger mit parallelen Gurten die Spannungen der Gitterstäbe der Transversalkraft, die Spannungen der Gurte dem Momente proportional.

Wir führen die Transversalkraft Q als positiv in Rechnung, wenn sie auf den linken Theil nach oben, oder auf den rechten Theil nach unten wirkt. Wir führen endlich das Moment M als positiv in Rechnung, wenn es auf den linken Theil links drehend oder auf den rechten Theil rechts drehend wirkt, oder wenn es den Träger nach oben convex zu biegen strebt.

A. Einfache Träger.

II. Kapitel.

Wirkung von Einzellasten.

§. 11. **Wirkung von Einzellasten mit unveränderlicher Lage.** Unter einem einfachen Träger verstehen wir einen solchen, welcher nur auf zwei Stützen ruht, im Gegensatze zum continuirlichen Träger. Der Träger sei durch beliebig viele Lasten $G_1, G_2, G_3, \ldots$ belastet, welche von der linken Stütze den Abstand $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ von der rechten den Abstand $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \ldots$ haben. Die Entfernung der Stützen sei l, der Druck auf dieselben D, D'. (Fig. 18a).

a) Anwendung der Rechnung. Es ist:

$$1.\quad \begin{cases} D = G_1 \frac{\xi'_1}{l} + G_2 \frac{\xi'_2}{l} + G_3 \frac{\xi'_3}{l} + \dots \\ D' = G_1 \frac{\xi_1}{l} + G_2 \frac{\xi_2}{l} + G_3 \frac{\xi_3}{l} + \dots \end{cases}$$

Sind Q_1, Q_2, Q_3 . . . die Transversalkräfte für die einzelnen Strecken $A\,C_1$, $C_1\,C_2$, $C_2\,C_3$ . . ., so ist

$$2.\quad Q_1 = D,\quad Q_2 = D - G_1,\quad Q_3 = D - G_1 - G_2 \text{ u. s. w.}$$

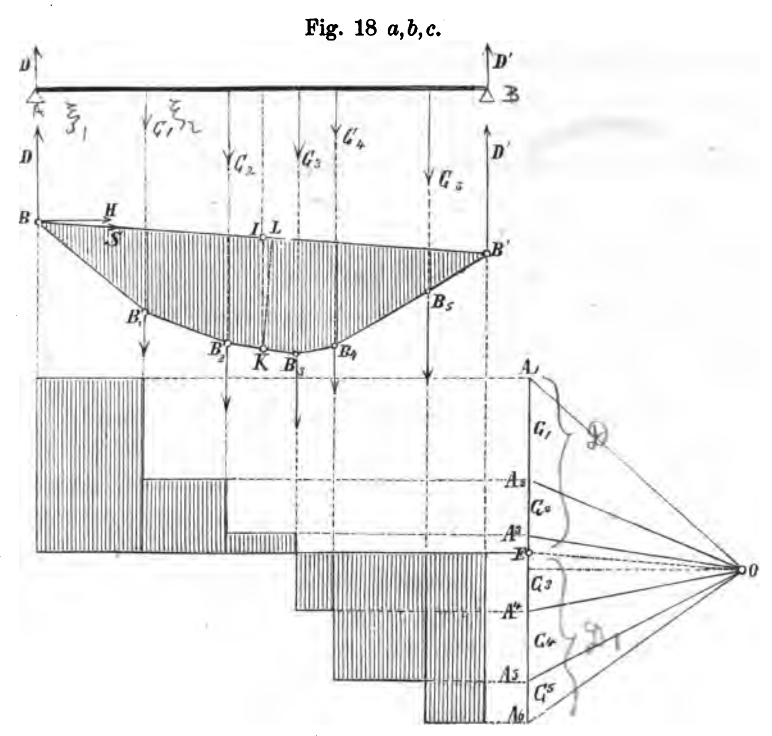
Das Moment M im Abstande x von A ist

$$3.\quad M = -Dx + G_1\,(x - \xi_1) + G_2\,(x - \xi_2) + \dots$$

wobei sich die Summirung auf alle links vom betreffenden Querschnitte liegenden Lasten zu erstrecken hat.

b) Anwendung der Construction. Man trage die gegebenen Kräfte zur Bildung des geradlinigen Kräftepolygons der Reihe nach auf einer Geraden auf (Fig. 18*b*) und ziehe nach den so erhaltenen Punkten von einem beliebig gewählten Pole O die Strahlen. Zu diesen Strahlen

Fig. 18 *a,b,c.*



ziehe man zur Bildung des Seilpolygons zwischen den gegebenen Kraftrichtungen Parallelen (Fig. 18*a*).

Schliesst man jetzt das Seilpolygon durch die Gerade BB' die sogen. Schlusslinie, und zieht durch O einen Strahl OE parallel zu BB', so

ergiebt sich im Kraftpolygon der Punkt E und es ist nun nach dem vorigen Paragraph offenbar $D = A_1 E$ und $D' = A_0 E$. Ferner wird

$$Q_1 = D = EA_1, \quad Q_2 = D - G_1 = A_1 E - A_1 A_2 = EA_2,$$
$$Q_3 = D - G_1 - G_2 = A_1 E - A_1 A_2 - A_2 A_3 = EA_3$$

u. s. w., d. h. die Transversalkräfte sind die Abstände der Punkte des Kräftepolygons von E. Es ist nun leicht, sie aus dem Kräftepolygone als Ordinaten in dem betreffenden Querschnitte aufzutragen (Fig. 18c).

Legen wir durch das Seilpolygon an beliebiger Stelle einen Verticalschnitt JK, fällen von K auf BB' die Senkrechte KL, bezeichnen mit H die Horizontalspannung, mit S die Spannung des Seilstückes BB', mit M die Summe der Momente aller äusseren links von JK wirkenden Kräfte, so ist für das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt K: $M = S . KL = S . JK . \cos JKL$, oder weil $\angle JKL = \angle SBH$, mithin $S \cos SBH = H$ ist, wenn wir JK mit y bezeichnen,

$$M = H . y.$$

Hierbei ist nach §. 2 H gleich dem Abstande des Poles O vom Kräftepolygone oder gleich der Poldistanz.

Das Moment ist also proportional der verticalen Höhe des Seilpolygons in dem fraglichen Querschnitte. Wählt man, was jedenfalls zweckmässig ist, H gleich der Krafteinheit, so ist

$$M = y,$$

so dass in diesem Falle die Momente direct durch die Höhe des Seilpolygons dargestellt werden.

Diese wichtige Eigenschaft des Seilpolygons ist es insbesondere, welche dasselbe zur graphischen Lösung unserer Aufgabe tauglich macht.

§. 12. **Einfluss einer Einzellast mit variabler Lage.** a) Transversalkräfte. Liegt die Last rechts vom fraglichen Querschnitte C (Fig. 19), so ist $Q = D$, also (wenn wir nach §. 10 auf den linken Theil nach oben wirkende Transversalkräfte als positiv nehmen) Q positiv. Je mehr G nach links rückt, desto grösser wird D oder Q. Liegt die Last links vom fraglichen Querschnitte C (Fig. 20), so ist $Q = D - G$, also, da stets $D < G$ ist, Q negativ. Je mehr G nach rechts rückt, desto kleiner wird D, desto grösser also der absolute Werth von Q. Hieraus folgt:

Fig. 19.

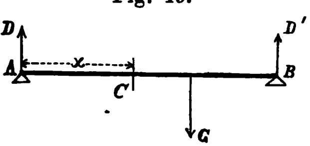
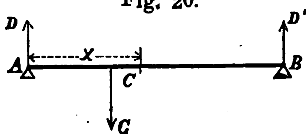


Fig. 20.



Eine Einzellast erzeugt eine positive oder negative Transversalkraft, je nachdem sie auf der rechten oder

linken Seite des fraglichen Querschnittes liegt und die Transversalkraft ist um so grösser, je näher die Last dem Querschnitte liegt.

b) Momente. Liegt die Last rechts vom Querschnitte C, so ist $M = -Dx$, also M negativ und um so grösser, je grösser D ist, je näher also die Last dem Querschnitte liegt. Liegt die Last auf der linken Seite, so ist $M + D'(l - x) = 0$ oder $M = -D'(l - x)$, also M negativ und um so grösser, je grösser D' ist, je weiter also G nach rechts oder je näher G dem Querschnitte liegt. Hieraus folgt:

Eine Einzellast erzeugt, wo sie auch liege, in jedem Querschnitte ein negatives Moment, welches um so grösser ist, je näher die Last dem Querschnitte liegt.

§. 13. **Gefährlichste Lage eines Systemes von Einzellasten bezüglich der Transversalkräfte.** Wir denken uns jetzt den Träger durch einen Wagenzug belastet.

Ist G die Summe aller links vom fraglichen Querschnitte liegenden Lasten, so ist $Q = D - G$. Je weiter die Last nach links rückt, ohne dass ein Rad den Träger verlässt, oder ein Rad den Querschnitt überschreitet, desto grösser wird D, desto grösser also Q, wenn Q positiv oder $D > G$ ist; verlässt ein Rad den Träger, so ändert sich zwar das Gesetz für G; indess gilt der Satz, dass sich Q vergrössert, von Neuem, bis ein Rad den Querschnitt überschreitet. Dasselbe gilt für den nach rechts rückenden Zug, wenn Q negativ ist. Hieraus folgt:

Die Transversalkraft wird für irgend einen Querschnitt zum Maximum, wenn ein Rad am Querschnitte liegt, und zwar zum positiven und negativen Maximum, je nachdem das Rad dicht rechts oder links vom Querschnitte liegt.

Da für eine Einzellast nach §. 12 Q positiv oder negativ ist, je nachdem die Last rechts oder links vom Querschnitte liegt, so wird Q in der Regel zum positiven oder negativen Maximum werden, wenn nur rechts oder links Lasten liegen, und zwar die schwersten dem Querschnitte am nächsten, wenn also bei Eisenbahnen das erste Locomotivrad, bei Strassen das hintere Wagenrad am Querschnitte liegt. Nur wenn eine kleine Last vorausschreitet, kann Q für Querschnitte, welche nahe an den Enden liegen, wo Q am grössten wird, oder an welchem der Zug nicht beginnt, noch grösser werden, wenn die zweite Last am Querschnitte liegt.

Ist G_1 die Resultante aller Lasten und ξ_1 ihr Abstand von der rechten Stütze, so ist

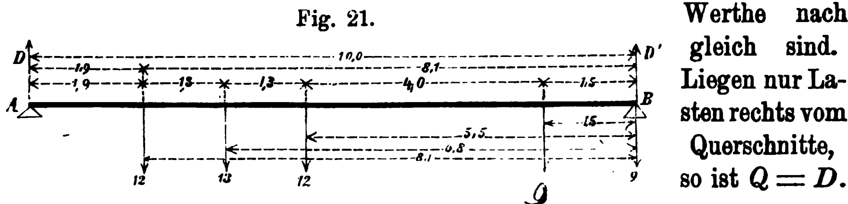
$$D = G_1 \frac{\xi_1}{l}, \text{ also } Q = G_1 \frac{\xi_1}{l} - G.$$

Hiernach ist die Aenderung von Q beim Verrücken des Querschnittes in Beziehung auf x vom ersten Grade, da sich ξ_1 um ebenso viel ändert, als x, vorausgesetzt, dass hierbei kein Rad eine Stütze überschreitet. Q wird also innerhalb zweier Querschnitte, für welche sich auf dem Träger dieselben Lasten befinden, durch eine gerade Linie dargestellt werden können.

Am besten wird man daher das Q für diejenigen Querschnitte bestimmen, für welche eine Last auf einem Ende ruht, wenn gleichzeitig die erste, resp. zweite Last am Querschnitte liegt.

§. 14. **Bestimmung der Maximaltransversalkräfte.** *a)* Durch Rechnung. Die Transversalkraft Q ist leicht nach §. 11 zu bestimmen. Am besten bestimmt man nur das positive Q, da für gleichweit von den Stützen abstehende Querschnitte das positive und negative Q dem absoluten Werthe nach gleich sind. Liegen nur Lasten rechts vom Querschnitte, so ist $Q = D$.

Fig. 21.



Beispiel: Die Spannweite sei 10^m. Die Lastvertheilung sei die in Fig. 21 dargestellte. Für $x = 1{,}9$, $l - x = 8{,}1^m$ (Fig. 21) liegt eine Last auf der rechten Stütze. Es wird

$$Q = D = 12 . \frac{8{,}1}{10} + 13 . \frac{6{,}8}{10} + 12 . \frac{5{,}5}{10} + 9 . \frac{1.5}{10}$$

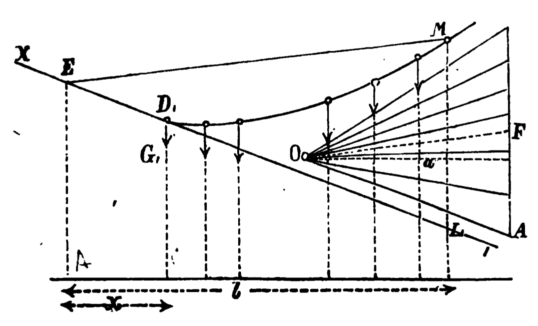
$$= 9{,}72 + 8{,}84 + 6{,}60 + 1{,}35 = 26{,}51,$$

oder einfacher, da sich die drei ersten Lasten zu einer in II wirkenden Resultante vereinigen lassen,

$$Q = D = 37 . \frac{6{,}8}{10} + 9 . \frac{1{,}5}{10} = 25{,}16 + 1{,}35 = 26{,}51 \textit{ Tonnen.}$$

b) Durch Construction. Man construire für die gegebenen Lasten das Kraftpolygon mit den nach dem beliebig angenommenen Pole O gehenden Strahlen (Fg. 22) und leite hieraus das Seilpolygon ab. Es sei jetzt für einen Querschnitt C (Fig. 22) im Abstande $AC = x$ von der Stütze A das Q zu bestimmen, und zwar unter der Voraussetzung, dass das erste Rad (mit dem Drucke G_1) des von rechts nach links rückenden Zuges am Querschnitte liegt. Man bestimme auf der äusseren Seite $D_1 X$ des Seilpolygons, welche an den Kopf G_1 des Zuges grenzt, einen Punkt E,

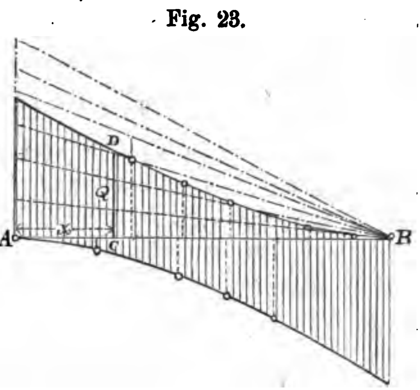
Fig. 22.



welcher vom Punkte D_1 einen der Abscisse x gleichen Horizontalabstand hat, bestimme ferner auf dem Seilpolygone einen Punkt M, welcher von E den der Spannweite l gleichen Horizontalabstand hat und ziehe EM und parallel zu EM den Strahl OF. Alsdann ist nach dem Früheren $Q = AF$. Schneidet die durchgehende Verticale die Verlängerung der äussersten Seite $D_1 X$ des Seilpolygons in L, so ist

$$\triangle\ OAF \sim \triangle\ ELM,$$

Fig. 23.



weil die Seiten dieser Dreiecke parallel sind, also

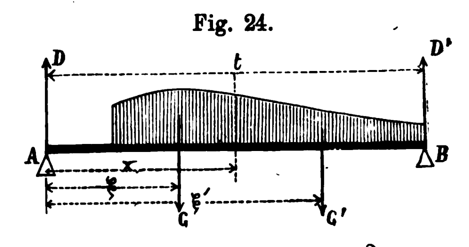
$$Q = AF = LM \frac{a}{l},$$

wenn a die Poldistanz bedeutet. Wählt man $a = l$, so wird $Q = LM$. Hieraus folgt: Die grössten Transversalkräfte sind den verticalen Abständen zwischen dem Seilpolygone und der Verlängerung der äussersten, an den Kopf des Zuges grenzenden Seite desselben proportional und diesen gleich, wenn man die Poldistanz gleich der Spannweite wählt, vorausgesetzt, dass die erste Last am Querschnitte ruhen muss, damit Q zum Maximum wird. Hieraus ergiebt sich die in Fig. 23 dargestellte einfache Construction. Die positiven und negativen Q, welche bezüglich von der linken und rechten Stütze gleichweit abstehen, ergeben sich gleich gross, so dass man nur die in dem einen Sinne wirkenden Q zu construiren braucht.

Muss die zweite Last am Querschnitte liegen, damit Q zum Maximum werde, so zieht man zunächst eine Gerade mit der Gleichung $y = G_1 \frac{e-x}{l}$, wenn G_1 die erste Last, e ihren Abstand von der zweiten bedeutet und construirt nun, wie vorhin, ein Seilpolygon, für welches die zweite Last an der rechten Stütze B liegt und dessen zweite Seite (zwischen der II. und III. Last) mit der genannten Geraden zusammenfällt, so stellen die Ordinaten desselben über der Abscissenaxe $max\ (+\ Q)$ dar. Der Nachweis ist leicht zu führen.

§. 15. **Gefährliche Belastung bezüglich der Momente.** Da nach §. 12 eine Einzellast für irgend einen Querschnitt ein negatives Moment erzeugt, wo sie auch liegen möge, so werden offenbar auf jeder Seite des fraglichen Querschnittes Lasten liegen müssen, damit M zum Maximum werde. Da eine Einzel-

Fig. 24.



last ein um so grösseres Moment erzeugt, je näher sie dem Querschnitte liegt, so werden offenbar die schwersten und dichtesten Lasten möglichst nahe dem Querschnitte liegen müssen. Bestimmter lässt sich die gefährlichste Belastungsweise angeben, wenn man zunächst eine stetige, aber beliebig veränderliche Belastung voraussetzt (Fig. 24).

Die auf beiden Seiten des Querschnittes liegenden Lasten seien G, G', die Abstände ihrer Schwerpunkte von der linken Stütze ξ, ξ'. Alsdann ist $Dl = G(l-\xi) + G'(l-\xi')$, $M = -Dx + G(x-\xi)$, das ist

$$a)\quad M = -G\xi\left(1-\frac{x}{l}\right) - G'x\left(1-\frac{\xi'}{l}\right).$$

Die Last verrücke sich jetzt um $d\xi$ nach links, wobei sich M um dM verändere. Bezeichnet man die Last pro Längeneinheit bei A, B und C mit q_1, q_2, q_3, so wird hierbei auf der linken Seite die Last $q_1\,d\xi$ vom Träger rücken, dagegen die Last $q_3\,d\xi$ von rechts nach links rücken und G wird sich um dG vermindern. Hiernach ändert sich das Moment in Folge der links liegenden Last um

$$+\,q_1\,d\xi\,.\,\frac{1}{2}\,d\xi\left(1-\frac{x}{l}\right) + G\,d\xi\left(1-\frac{x}{l}\right) - q_3\,d\xi\,x\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Ebenso ändert sich das Moment in Folge der auf der rechten Seite liegenden Last um

$$-\,q_2\,d\xi\,.\,x\frac{d\xi}{2l} - G'x\frac{d\xi}{l} + q_3\,d\xi\,x\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Sonach ist, da die Glieder mit q_1 und q_2 gegen die übrigen verschwindend klein sind, weil sie $d\xi^2$ als Factor haben und zwei Glieder sich gegenseitig heben

$$dM = -\,G\left(1-\frac{x}{l}\right)d\xi + G'x\frac{d\xi}{l},$$

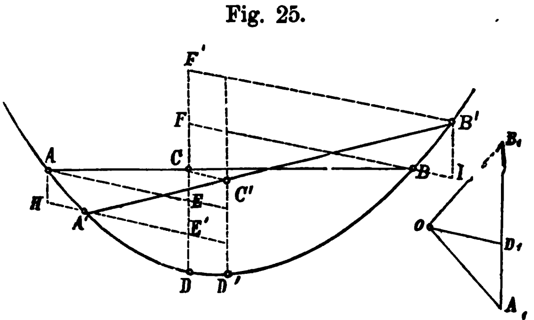
$$\frac{dM}{d\xi} = \frac{G'x - G(l-x)}{l}.$$

Hiernach wird M zum Maximum für $G'x = G(l-x)$ oder für

$$5.\quad \frac{G'}{G} = \frac{x}{l-x} \text{ oder } \frac{G}{l-x} = \frac{G'}{x}.$$

Dasselbe lässt sich auch graphisch nachweisen. Zieht man in der Seilencurve (Fig. 25) eine Sehne AB und nimmt darin den Punkt C so an, dass die Horizontalprojectionen von AC und CB gleich x und $l-x$ sind, so ist die durch C gehende verticale Sehne $CD = M$ für x. Bei der unendlich kleinen Verrückung der Sehne, wobei die Horizontalprojectionen von AC und CB sich

Fig. 25.



nicht verändern, komme A, B, C nach A', B', C'. Alsdann ist $C'D' = M + dM$. Damit nun M zum Maximum oder $\frac{dM}{d\xi} = 0$ werde, muss $C'D' = CD$ oder CC' parallel DD' sein. Ist im Kraftpolygon $OA_1 \parallel AA'$, $OB_1 \parallel BB_1$, $OD_1 \parallel DD'$, so sind A_1D_1, B_1D_1 die in den Strecken AC und CB liegenden Lasten G, G'.

Zieht man durch C eine Verticale und bis zu derselben durch A, A', B, B' Parallelen zu CC' oder DD', so ergeben sich die Punkte E, E', F, F'. Es ist nun

$$CE : CF = AC : BC = x : l - x,$$

ebenso

$$CE' : CF' = A'C' : B'C' = x : l - x,$$

also $CE : CF = CE' : CF'$ oder $CE' : CE = CF' : CF$, also auch $CE' - CE : CF' - CF = CE : CF$, d. i.

$$EE' : FF' = x : l - x.$$

Zieht man noch jetzt durch A' und B Parallelen zu CC' oder DD', welche die durch A und B gehenden Verticalen in H und J schneiden, so ist $AH = EE'$, $JB' = FF'$. Da $\triangle AA'H \sim \triangle OA_1D_1$, $\triangle BB'J \sim \triangle OB_1D_1$ und $A'H = BJ$ ist, so ist

$$A_1D_1 : B_1D_1 = AH : B'J = EE' : FF' = x : l - x.$$

Da $A_1D_1 = G$, $B_1D_1 = G'$ ist, so ist $G : G' = x : l - x$, was mit der obigen Gleichung 5 übereinstimmt.

Für Einzellasten wird nun dieses Gesetz zwar nicht genau gelten, indess doch annähernd; wir können daher sagen:

Damit das Moment an einem beliebigen Querschnitte ein Maximum werde, muss der Zug eine solche Lage haben, dass sich die Lasten zu beiden Seiten des Querschnittes zu einander nahezu ebenso verhalten, wie die Theile, in welche die Spannweite durch den Querschnitt getheilt wird, oder dass die auf die Längeneinheit entfallende Last auf jeder Seite des Querschnittes nahezu gleich gross ist.

Die Formel *a*) (S. 18) gilt auch für Einzellasten. Ist e der constante Abstand der auf beiden Seiten des Querschnittes wirkenden Mitteldrücke, so ist $\xi' = \xi + a$, also

$$M = -G\xi\left(l - \frac{x}{l}\right) - G'x\left(1 - \frac{\xi + a}{l}\right).$$

Hiernach ist M in Beziehung auf ξ vom ersten Grade, M muss also bei zunehmenden ξ entweder ab- oder zunehmen, so lange kein Rad den Querschnitt überschreitet. Damit also M zum Maximum werde, muss ein Rad am Querschnitte liegen, was sich graphisch folgendermassen nachweisen lässt.

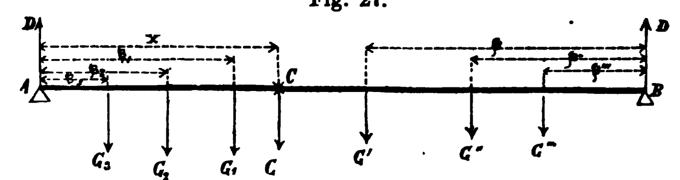
In Fig. 26 entspricht die Verticale CD dem Momente **bei** (Verrückt man die Gerade AB, so dass die Horizontalprojectionen v(AC, BC gleich (nämlich $= x$, $l - x$) bleiben, so beschreibt C, **so lang** die Enden AB **auf der** selben Geraden **bleiben** wie sich leicht nach**weise** lässt, eine Gerade. **Da di**e Enden auf gebroch**enen** Linien gleiten, so **wird** der Punkt C eine **gebro**chene Gerade beschreiben. Die Verticalen zwischen dieser Linie und **dem** Seilpolygon entsprechen den Momenten bei verschiedener Lage des **Zuges** für ein gegebenes x. Offenbar wird die grösste Verticale nur über **einer** Ecke des Seilpolygons (nicht unter einer Ecke der von C beschriebenen gebrochenen Linien) stattfinden können, d. h. für das Maximum von M muss eine Last am Querschnitte liegen.

Fig. 26.

Für irgend einen Querschnitt wird also das Moment zum Maximum, wenn ein Rad über dem Querschnitte liegt. Welches der Räder am Querschnitte liegen muss, ist durch die vorige Regel bestimmt.

§. **16. Bestimmung der Maximalmomente.** *a*) Durch Berechnung. Sind die links vom fraglichen Querschnitte liegenden Lasten G_1, G_2, $G_3 \ldots$, ihre Abstände von der linken Stütze ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \ldots$, die rechts liegenden Lasten G', G'', $G''' \ldots$, ihre Abstände von der rechten Stütze ξ', ξ'', $\xi''' \ldots$ (Fig. 27) und die am Querschnitte selbst liegende Last $= G$, so ist

Fig. 27.



$$Dl = G(l-x) + G_1(l-\xi_1) + G_2(l-\xi_2) + \ldots$$
$$+ G'\xi' + G''\xi'' + \ldots,$$
$$M = Dx - G_1(x-\xi_1) - G_2(x-\xi_2) + \ldots$$

d. i. wenn man den Ausdruck für D einsetzt:

$$6. \quad \boldsymbol{Ml = Gx(l-x) + (G_1\xi_1 + G_2\xi_2 + G_3\xi_3 + \ldots)(l-x) + (G'\xi' + G''\xi'' + G'''\xi''' + \ldots)x}$$

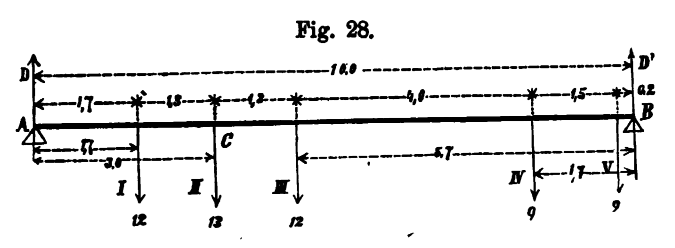
Es genügt, namentlich bei grösseren Spannweiten, hiernach das M für Querschnitte auszurechnen, welche die halbe Spannweite in 5 oder 10

gleiche Theile theilen, die erhaltenen Werthe als Ordinaten aufzutragen und sie durch eine Curve zu verbinden. Streng genommen, besteht die Curve aus einzelnen Parabelstücken, welche sich in den Punkten, welche einer Aenderung der am Querschnitte liegenden Last oder dem Abgehen oder Hinzukommen einer neuen Last entsprechen, schneiden, wie Fig. 30 zeigt.

Beispiel. Es sei das Moment bei 10^m Spannweite für $x = 3^m$ zu bestimmen; die Belastung sei dieselbe, wie im Beispiele zu §. 14; dieselbe erfolge nämlich durch eine Locomotive mit der in Fig. 16 dargestellten Lastvertheilung.

a) Der Zug gehe nach links (Fig. 28). Liegt die Last II bei C, so wirkt pro Meter links $\frac{12}{3} = 4$, rechts $\frac{12 + 9 + 9}{7} = 4{,}29$; liegt die Last III

Fig. 28.



bei C, so wirkt pro Meter links $\frac{12 + 12}{3} = 8{,}33$, rechts $\frac{9 + 9}{7} = 2{,}57$. Nach der im vorigen Paragraph gefundenen Regel würde also die Last II am Querschnitte liegen müssen. Nach 6) ist:

$$M \,.\, 10 = 13 \,.\, 3 \,.\, 7 + 12 \,.\, 1{,}7 \,.\, 7 + (12 \,.\, 5{,}7 + 9 \,.\, 1{,}7 + 9 \,.\, 0{,}2)\; 3 = 672{,}3,$$

$$M = 67{,}23 \text{ Tonnenmeter.}$$

b) Der Zug gehe nach rechts (Fig. 29). Die auf einen Meter entfallende Last ist, wenn die einzelnen Lasten bei C liegen:

für II links $\frac{12}{3} = 4{,}00$, rechts $\frac{12}{7} = 1{,}71$,

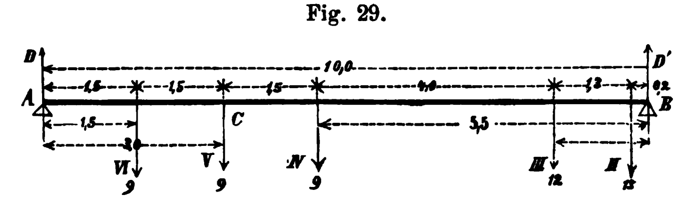
„ III „ 0 $\qquad\frac{13 + 12}{7} = 3{,}57$,

„ IV „ $\frac{9}{3} = 3{,}00$, „ $\frac{12 + 13 + 12}{7} = 5{,}28$,

„ V „ $\frac{9}{3} = 3{,}00$, „ $\frac{9 + 12 + 13}{7} = 4{,}86$.

Nach der vorigen Regel würde V bei C liegen müssen. Da sich aber bei dieser Lage bereits eine schwere Last vom Träger entfernt hat, so kann vielleicht auch IV bei C liegen müssen. In der vorigen Weise ergiebt sich, wenn IV bei C liegt, $M = 47{,}22$, wenn V bei C liegt, $M = 49{,}38$, so dass die

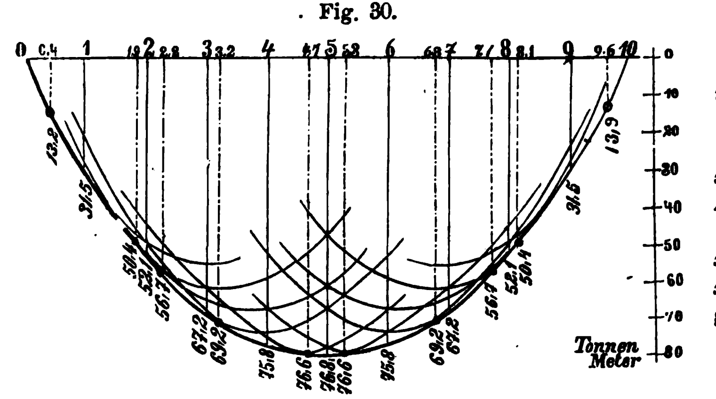
Fig. 29.



letzte Lage doch beizubehalten ist. Da sich indess für den nach links gehenden Zug M grösser ergiebt, so ist $M = 67{,}23$ beizubehalten.

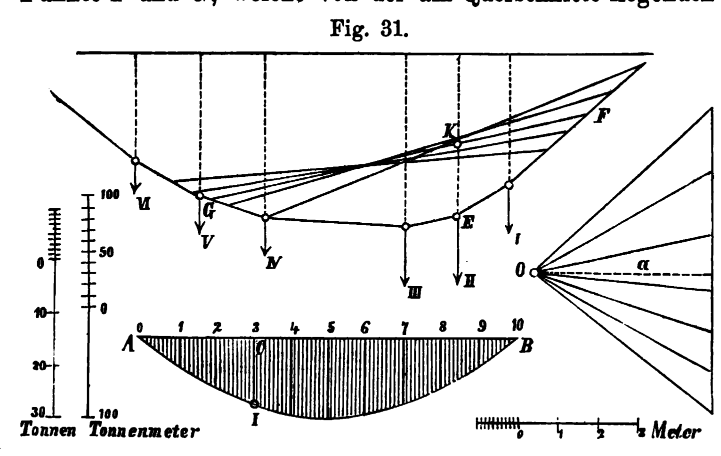
Die in gleicher Weise berechneten Momente für die um 1^m abstehenden Querschnitte, sowie die Momente, welche dem Hinzukommen einer neuen Last entsprechen, wobei also ein Rad auf einer Stütze ruht, sind in Fig. 30 graphisch dargestellt. Für $x = 0$ bis $x = 2{,}20^m$ ruht das Rad I, für $x = 2{,}20^m$ bis $x = 5^m$ ruht dagegen das Rad II am Querschnitte.

Fig. 30.



b) Durch Construction. Nachdem man das Seilpolygon in der bekannten Weise construirt hat, bestimmt man, um das Moment M für den Querschnitt C (Fig. 31) zu construiren, auf dem Seilpolygone zwei Punkte F und G, welche von der am Querschnitte liegenden Last, welcher die Seilecke E entspricht, einen den Strecken AC und BC gleichen Horizontalabstand haben u. zieht FG; alsdann ist die Verticale $EK = M$ (wenn die Poldistanz $= 1$ ist), und man kann nun $CJ = EK$ machen. Man kann in dieser Weise leicht das Moment construiren, welches dem Zusammenfallen verschiedener Lasten mit dem Querschnitte entspricht, und so leicht die gefährlichste Lage der Belastung ermitteln.

Fig. 31.



Allgemein ist bekanntlich, wenn $KE = y$ und die Poldistanz $= a$ ist, $M = ay$. Hierbei ist a als Kraft auf dem angewendeten Kraftmassstabe, y auf dem angewendeten Längenmassstabe zu messen. Die Einheit für M, damit $M = y$ werde, ist offenbar $\frac{1}{a}$ der Längeneinheit, (wenn die Poldistanz a Krafteinheiten hat), oder, was dasselbe ist, eine Längeneinheit ist zu a Momenteneinheiten anzunehmen. In der Figur ist z. B.

$a = 35$ *Krafteinheiten*; als Längeneinheit ist für *1 Meter 0,5*^{c} angenommen; daher ist die Momenteinheit $= \frac{1}{35}$ Längeneinheit $= \frac{0,5}{35} = 0,0143$ *Centimeter*.

Hat man eine grössere Anzahl von Brücken von verschiedener Spannweite zu construiren, so kann für alle Brücken dasselbe Seilpolygon angewendet werden, wodurch die Anwendung dieser Methode ungemein schnell zum Ziele führt.

Auf Tafel I. ist in Fig. 1, 2, 5 und 6 ein Beispiel für die Construction der grössten Transversalkräfte und Momente durchgeführt.

§. 17. **Absolutes Maximum der Momente.** Da für irgend einen Querschnitt M zum Maximum wird, wenn an demselben eine Last liegt, so wird auch an dem Querschnitte, an welchem M zum absoluten Maximum wird, eine Last liegen müssen.

a) Anwendung der Rechnung. Wir bezeichnen die Resultanten der links und rechts vom Querschnitte liegenden Lasten mit G_1, G_2, ihre Abstände von dem Querschnitte mit a_1, a_2 und die am Querschnitte mit der Abscisse x liegende Last mit G. Alsdann ist nach 3)

$$Ml = Gx(l-x) + G_1(x-a_1)(l-x) + G_2(l-x-a_2)x.$$

Hiernach wird M zum Maximum für

$$7) \quad x = \frac{l}{2} + \frac{G_1 a_1 - G_2 a_2}{2(G+G_1+G_2)}.$$

Bei beliebig vielen Lasten ist $G + G_1 + G_2$ die Summe aller Lasten, $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ die Summe der Momente aller links, resp. rechts liegenden Lasten in Beziehung auf den Querschnitt. Annähernd ist $x = \frac{1}{2} l$. Durch Einsetzung des genauen Ausdruckes für x ergiebt sich

$$8) \quad max\, M = \frac{1}{4}(G+G_1+G_2)\,l - \frac{1}{2}(G_1 a_1 + G_2 a_2) + \frac{(G_1 a_1 - G_2 a_2)^2}{4(G+G_1+G_2)\,l}.$$

Das letzte Glied ist in der Regel sehr klein, daher annähernd

$$9) \quad max\, M = \frac{1}{4}(G+G_1+G_2)\,l - \frac{1}{2}(G_1 a_1 + G_2 a_2).$$

b) Anwendung der Construction. Gleitet auf dem Seilpolygone eine Gerade AB mit ihren Enden, wobei die Horizontalprojection derselben constant gleich der Spannweite l bleibt (Fig. 32), so umhüllt dieselbe, so lange ihre Enden auf derselben Seite des Seilpolygons bleiben, eine Parabel mit verticalen Durchmessern. Bei weiterer Bewegung wird sie eine aus Parabelstücken zusammengesetzte Linie umhüllen. Die über einer Ecke D stehende Verticale DC entspricht dem am Angriffspunkte der Last G wirkenden Momente. Am grössten wird nun offenbar DC, wenn die Gerade AB die erwähnte Umhüllungscurve in C, tangirt, so dass das Maximum des bei D stattfindenden Momentes dem Verticalstande des Seilpolygons und der Umhüllungscurve

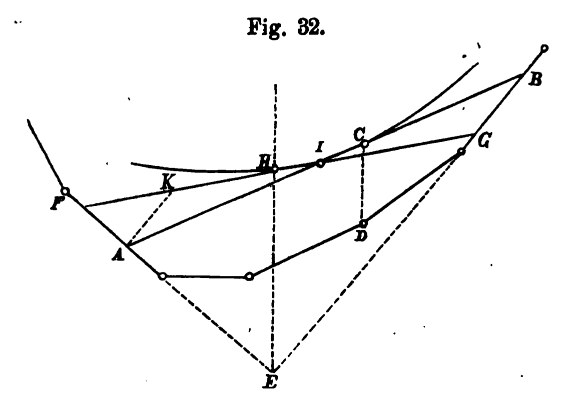


Fig. 32.

bei D entspricht. Die Construction der Tangente AB ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Die Verlängerung der Seiten, auf welchen AB gleitet, mögen sich in E schneiden. FG sei die Tangente für den Punkt H der Parabel, welcher in der durch E gehenden Verticalen liegt, also $FH = HG$ und J der Durchschnittspunkt zwischen AB und FG. Ziehen wir durch A eine Parallele zu EB, welche FG in K schneidet, so sind die Horizontalprojectionen von AF und AK gleich, da diejenigen von EF und und EG gleich sind. Da aber auch die Horizontalprojectionen von FG und AB, also auch die von AF und GB gleich sind, so muss $AK = GB$ sein. Da die Dreiecke AKJ und BGJ ausserdem in den Winkeln übereinstimmen, so sind sie congruent, also $AJ = BJ$. Bei der Parabel sind die Abstände der Durchmesser, welche durch zwei beliebige Punkte derselben und den Durchschnittspunkt der entsprechenden Tangenten gehen, gleich gross; mithin müssen die Horizontalprojectionen von HJ und CJ gleich sein. Der Mittelpunkt J der Tangente AB liegt also in der Mitte zwischen den durch die fragliche Seilecke D' und den Durchschnittspunkt E der Verlängerungen der Seilpolygonseiten, auf welcher AB gleitet, gehenden Verticalen. Da die Horizontalprojection von $AB = l$ ist, so ist somit die Construction von AB sehr leicht durchzuführen. Natürlich ist die Construction für einige Ecken zu wiederholen, um diejenige zu bestimmen, für welche M wirklich zum absoluten Maximum wird.

Der oben aufgestellte Satz lässt sich in statischer Form auch folgendermassen aussprechen: An irgend einer Last wird das Moment zum Maximum, wenn diese Last und die Resultante sämmtlicher Lasten von der Mitte des Trägers gleich weit abstehen.

III. Kapitel.

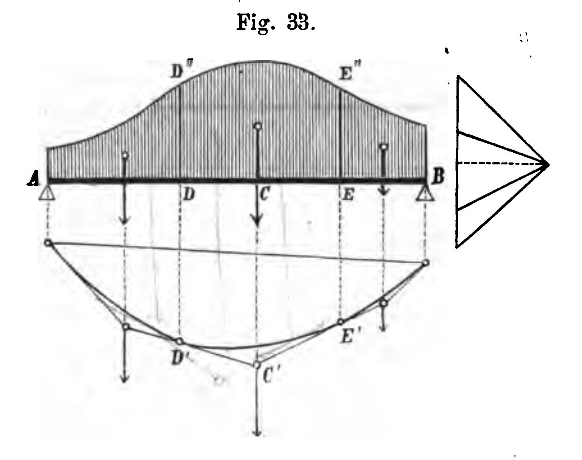
Stetige Belastung.

§. 18. **Beliebige Belastung.** Wir denken uns die Last q pro Längeneinheit als Ordinate aufgetragen (Fig. 33) und nennen die so entstehende Fläche die Belastungsfläche.

Das Seilpolygon geht hier in eine **Seilcurve** über, für welche natürlich dieselben Gesetze gelten, wie für das Seilpolygon.

Legen wir an das Seilpolygon in den, den Punkten D, E entsprechenden Punkten D', E' Tangenten, welche sich in C' schneiden, so geht nach §. 11 durch C die Resultante der in der Strecke DE liegenden Lasten oder C' liegt vertical unter dem Schwerpunkte der Fläche $DD''E''E$.

Fig. 33.



Denkt man sich nun die Last in lauter Einzellasten zerlegt, so werden dieselben sämmtlich durch die Durchschnittspunkte der Tangenten der Seilcurve für die den Trennungspunkten der Last entsprechenden Punkte gehen. Da die Tangenten der Strahlen, welche diesen Trennungslinien entsprechen, parallel sind, so bilden sie das Seilpolygon für die Einzellasten. Wir können daher schliessen:

Wenn wir die stetige Belastung in Theile zerlegen und dieselben durch Einzelkräfte ersetzen, so sind die Seiten des entsprechenden Seilpolygons Tangenten an die Seilcurve, wobei die Tangentialpunkte den Trennungslinien entsprechen.

Hierdurch wird es möglich, beliebig viele Tangenten der Seilcurve zu construiren und nach diesem die Seilcurve selbst zu verzeichnen.

§. **19. Totale gleichmässige Belastung.** Ist g die Last pro Längeneinheit, so ist jeder Stützendruck $= D = \frac{1}{2} g l$. Daher ist für irgend einen Querschnitt $Q = D - gx$, das ist

$$10. \quad Q = \frac{1}{2} g . (l - 2x).$$

Für $x = \frac{1}{2} l$ wird $Q = 0$. Am grössten ist Q für $x = 0$, nämlich $Q = + \frac{1}{2} g l$ und für $x = l$, nämlich $Q = - \frac{1}{2} g l$. Das Moment M wird für irgend einen Querschnitt $M = - Dx + \frac{1}{2} g x^2$, d. i.

$$11. \quad M = - \frac{1}{2} g x \, (l - x).$$

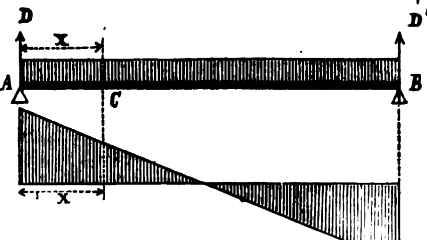
Am grössten wird M für $x = \frac{1}{2} l$, und zwar ist

$$12. \quad max\, M = - \frac{1}{8} g l^2.$$

Die Transversalkraft wird durch eine Gerade dargestellt, welche die Axe in der Mitte schneidet (Fig. 34).

Das Moment wird durch eine Parabel dargestellt, deren Scheitel in der Mitte liegt (Fig. 35). Dasselbe lässt sich leicht mit Hilfe der Tangenten construiren. Macht man im Kraftpolygon $OA' = OB'$, so ist, wenn AF und BF die Endtangenten der Seilcurve darstellen, $\triangle AEF \sim \triangle ODA'$, also

Fig. 34.



$$EF : A'D = AE : OD$$

oder

$$EF : \tfrac{1}{2} g l = \tfrac{1}{2} l : a, \text{ also } EF = \frac{g l^2}{4a}.$$

Sollen die Höhen der Seilcurven die Momente darstellen, so ist $a = 1$ zu nehmen, also $EF = \frac{1}{4} g l^2$. Um für irgend einen Punkt C die Tangente GH der Seilcurve zu construiren, ist zu beachten, dass nach dem vorigen Paragraph G und H vertical unter der Mitte von AC und BC liegen. Hieraus ergiebt sich leicht, dass sich, wenn man AF und BF in eine gleiche Anzahl gleicher Theile theilt und die Theilpunkte entsprechend mit einander verbindet, eine Schaar von Tangenten der Seil- oder Momentencurve entsteht (Fig. 36). In Fig. 35 ist $AC = 2 . AG'$, der Tangentialpunkt hat also vom Ende einen doppelt so grossen Horizontalabstand, als das betreffende Ende G der Tangente, wornach in Fig. 36 leicht die Tangentialpunkte zu bestimmen sind: dieselben liegen vertical über den abwechselnden Theilpunkten der Endtangenten. Da die Durchschnittspunkte der Tangenten nach dem vorigen Paragraph in der Mitte zwischen den durch die Tangentialpunkte gehenden Verticalen liegen, so werden auch die Durchschnitte der Tangenten in Fig. 36 vertical über den abwechselnden Theilpunkten der Endtangenten und die Tangentialpunkte in der Mitte zwischen den Durchschnittspunkten liegen.

Fig. 35.

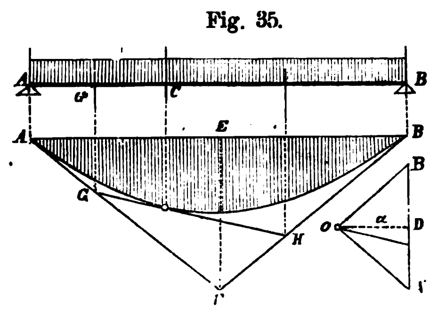
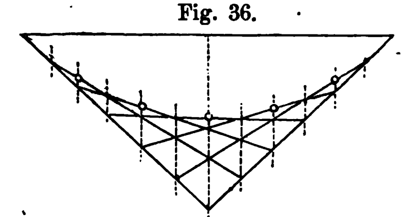


Fig. 36.



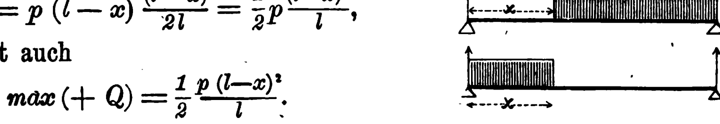
§. 20. Gefährlichste Belastung bezüglich der Transversalkräfte. In §. 5 wurde gefunden, dass eine Einzellast an einem beliebigen Querschnitte eine positive oder negative Transversalkraft erzeugt,

je nachdem sie auf der rechten oder linken Seite des Querschnittes liegt. Hieraus folgt für die Belastung durch einen Zug:

Die Transversalkraft wird zum positiven oder negativen Maximum, je nachdem der Zug vom Querschnitte aus bis zur rechten oder linken Stütze reicht (Fig. 37).

Für das positive Maximum ist der Stützendruck

Fig. 37.



$$D = p\,(l - x)\,\frac{(l - x)}{2l} = \frac{1}{2} p\,\frac{(l - x)^2}{l},$$

mithin ist auch

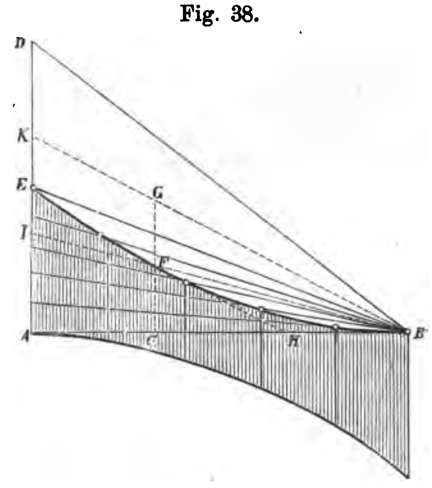
$$max\,(+\,Q) = \frac{1}{2}\,\frac{p\,(l - x)^2}{l}.$$

Das negative Maximum ergiebt sich hieraus einfach, indem man $l - x$ für x oder x für $l - x$ setzt. Wir haben daher:

$$13.\quad max\,(+\,Q) = +\,\frac{p\,(l - x)^2}{2l},\quad max\,(-\,Q) = -\,\frac{p x^2}{2l}.$$

Für die graphische Bestimmung könnte man das im §. 15 für Einzellasten gezeigte Verfahren anwenden (Fig. 37), wodurch sich für max $(+\,Q)$ und max $(-\,Q)$ zwei Parabeln ergeben, deren Scheiteln an den Enden des Trägers liegen. Jedoch wird die Construction nicht sehr genau, weil die Genauigkeit eines Punktes von der der vorhergehenden Punkte abhängt. Eine bessere Construction lässt sich, wie folgt, ermitteln. Eine durch den beliebigen Punkt F der Curven gehende Verticale schneide AB in C und den zur Tangente in F parallelen Strahl in G. Die Tangente in F schneide AB in H. Alsdann ist bekanntlich $CH = BH$, woraus leicht folgt, dass auch $CF = \frac{1}{2}\,CG$ sein müsse. Daher ist auch

Fig. 38.



$$AE = \frac{1}{2}\,AD = \frac{1}{2}\,pl.$$

Da $CF = \frac{1}{2}\,CG$ ist, so ist auch $AJ = \frac{1}{2}\,AK$, also

$$AJ : AE = AK : AD.$$

Hieraus ergiebt sich sofort folgende Construction: Man mache $AE = \frac{1}{2}\,p\,l$, theile AE und AB in eine gleiche Anzahl gleicher Theile und lege durch die Theilpunkte von AE und durch B Strahlen und durch die Theilpunkte von AB Verticalen. Die gesuchte Curve verbindet alsdann die entsprechenden Durchschnittspunkte beider Systeme.

§. 21. **Gefährlichste Belastung bezüglich der Momente.** Nach §. 13 bringt eine jede Last, wo sie auch liege, in jedem Querschnitte ein negatives Moment hervor. Demnach wird eine totale Belastung in jedem Querschnitte das grösste Moment erzeugen. Dasselbe ist durch Form. 11 (S. 25) bestimmt.

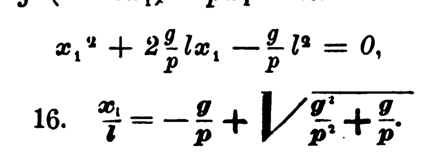
§. 22. **Belastung durch das Eigengewicht und die zufällige Last.** Bei gleichzeitiger Belastung durch beide Lasten wird

$$14. \quad M = -\frac{1}{2}(g+p)\,x\,(l-x),$$

$$15. \quad \begin{cases} max\,(+Q) = \frac{1}{2}\,g\,(l-2x) + \frac{1}{2}\,p\,\frac{(l-x)^2}{l}, \\ max\,(-Q) = \frac{1}{2}\,g\,(l-2x) - \frac{1}{2}\,p\,\frac{x^2}{l}. \end{cases}$$

Wir bezeichnen das $x = AC$ (Fig. 39), für welches $max\,(-Q) = 0$ wird, mit x_1; alsdann wird $0 = gl\,(l - 2x_1) - px_1^2$ oder

Fig. 39.



$$x_1^2 + 2\frac{g}{p}lx_1 - \frac{g}{p}l^2 = 0,$$

$$16. \quad \frac{x_1}{l} = -\frac{g}{p} + \sqrt{\frac{g^2}{p^2} + \frac{g}{p}}.$$

Für den Punkt D, in welchem $max\,(+Q) = 0$ wird, ist ebenso $BD = x_1$. Die Transversalkraft Q kann innerhalb des Theiles AC nur positiv, innerhalb des Theiles BD nur negativ sein, während sie im Theile CD sowohl positiv, als negativ sein kann. Hiernach ergiebt sich für

$l =$	5	10	20	50	75	100	150 Meter
$\frac{g}{p} =$	0,12	0,19	0,31	0,64	1,05	1,55	3,12 „
$AC = BD =$	0,24	0,29	0,33	0,38	0,42	0,44	0,46.l
$CD =$	0,52	0,42	0,34	0,24	0,15	0,12	0,08.l

Der Theil CD nimmt also mit zunehmender Spannweite ab.

§. 23. **Reduction von Einzellasten auf eine gleichmässige Belastung.** Für irgend einen Querschnitt lässt sich leicht diejenige gleichmässige Belastung bestimmen, welche dieselbe Transversalkraft oder dasselbe Moment erzeugt, wie ein System von Einzellasten, indem man das Q und M, welches das letztere erzeugt, nach dem Früheren berechnet und diesen Werth dem Ausdrucke 13) und 11) für das von der gleich-

mässigen Belastung p erzeugten Q und M gleichsetzt. Hierbei werden sich natürlich für die verschiedenen Querschnitte auch verschiedene Werthe von p ergeben; ebenso werden sich andere Werthe ergeben, je nach dem es sich um Q oder M handelt. Im Allgemeinen ergeben sich für Q grössere Werthe als für M, und zwar ist das p in Beziehung auf Q in der Mitte des Trägers am grössten (Fig. 40).

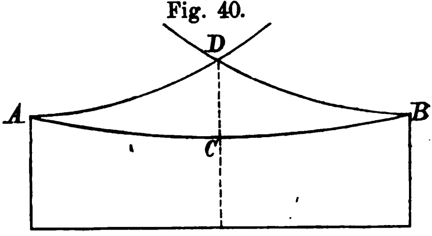


Fig. 40.

Für einen Querschnitt in der unmittelbaren Nähe der Stütze ist, wenn G die Gesammtlast, a ihren Abstand von der rechten Stütze bezeichnet, der Stützendruck $D = G\frac{a}{l}$. Daher ist

$$Q = D = G \cdot \frac{a}{l}, \quad M = Dx = \frac{Gax}{l},$$

wornach Q und M für dieselbe Lage der Last zum Maximum werden. Bei der gleichmässigen Belastung p ist für die Transversalkräfte

$$Q = D = \frac{1}{2} p\, l, \text{ also } \frac{1}{2} p l = G \frac{a}{l} \text{ oder } p = \frac{2\,Ga}{l^{\prime}}$$

und für die Momente

$$M = Dx = \frac{1}{2} p l x, \text{ also } \frac{1}{2} p\, l x = \frac{Gax}{l} \text{ oder } p = \frac{2\,Ga}{l^{\prime}}.$$

Für Querschnitte in der unmittelbaren Nähe der Stützen ergeben sich also für die Transversalkräfte und die Momente gleiche Werthe für die Last pro Längeneinheit (Fig. 40).

In folgeuder Tabelle sind die Werthe von Q und M, sowie die entsprechenden Werthe von p für die Enden und die Mitte des Trägers (für Tonnen und Meter) zusammengestellt.

l Spannweite	Q für die Enden	Q für die Mitte	M für die Mitte	p für Q und M an den Enden p_0	p für Q in der Mitte p_6	p für M in der Mitte p_5	g Eigengewicht
1	13,0	6,5	3,3	26,0	50,0	26,0	0,80
2	17,2	6,5	6,5	17,2	26,0	13,0	0,89
3	21,0	6,9	12,2	14,0	18,3	10,8	0,92
4	25,0	8,3	21,4	12,5	16,5	10,7	0,96
5	27,4	9,1	30,7	11,0	14,6	9,81	1,00
7	30,6	11,6	49,2	8,76	13,3	8,03	1,07
10	37,0	13,7	76,9	7,39	11,0	6,15	1,18
15	47,0	15,8	145,7	6,27	8,44	5,18	1,36
20	59,4	18,7	250,4	5,94	7,46	5,01	1,51
30	81,5	23,5	518,0	5,43	6,27	4,60	1,95
40	104,8	29,7	911,0	5,24	5,94	4,56	2,37
50	125,2	35,4	1409,6	5,01	5,67	4,51	2,83
80	176,0	52,4	3241,6	4,40	5,24	4,05	4,43
100	206,2	62,6	4598,2	4,13	5,01	3,68	5,78
150	277,7	84,1	8986,5	3,70	4,48	3,20	10,54

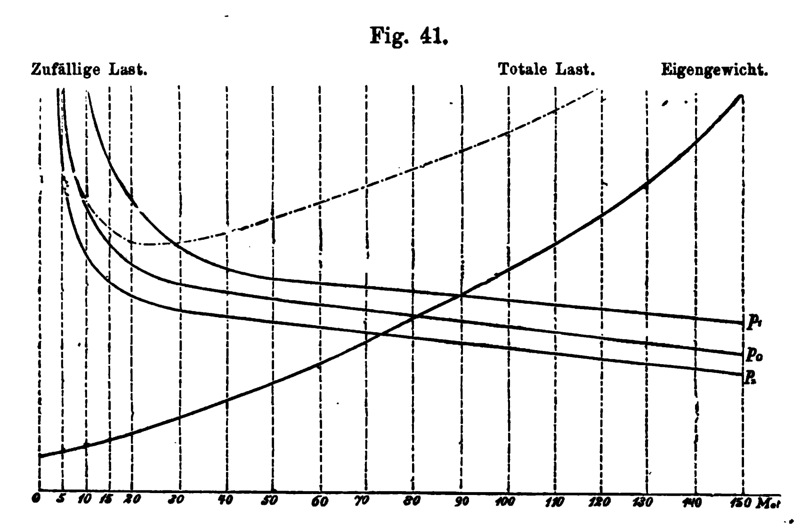
Hierbei ist eine Belastung durch 3 Locomotiven und Lastwägen nach der in Fig. 12 und 13 dargestellten Lastvertheilung angenommen.

In der letzten Rubrik ist das Eigengewicht eiserner Brücken zum Vergleiche mit angegeben. In Fig. 41 sind p und g, sowie die Gesammtlast q (letztere nur für das dem M in der Mitte entsprechende p) dargestellt.

Nach der Tabelle ist es bei kleinen Spannweiten nicht zulässig, den Eisenbahnzug durch eine einzige Last pro Längeneinheit zu ersetzen. Ja selbst bei grossen Spannweiten wird dies kaum möglich. Wenigstens würde es sich auch bei grossen Spannweiten empfehlen, zwei verschiedene gleichmässige Lasten anzunehmen, nämlich die eine für die Transversalkräfte, die andere für die Momente.

Da man die Gurte an den Enden, die Gitterstäbe in der Mitte des Trägers stärker zu machen pflegt, als es die Rechnung ergiebt, so könnte man allenfalls für die Momente diejenige Last pro Längeneinheit, welche

Fig. 41.



sich für die Mitte ergiebt, und für die Transversalkräfte diejenige Last pro Längeneinheit, welche sich für die Enden ergiebt, einführen.

Noch mehr würde man sich der Wahrheit nähern, wenn man einen Zug mit gleichmässig vertheilter Last annehmen würde, bei welchem die Last auf die Länge der drei Locomotiven (auf etwa 40^m) grösser wäre, als im übrigen Theile (Fig. 42).

Fig. 42.

A C D B

Für die zufällige Last, welche dem Momente M in der Mitte und der Transversalkraft am Ende entspricht, ergiebt sich nach der aufgestellten Tabelle als Näherungsregel:

Für die Momente:

17. für $l = 10$ bis 50 Meter

$$p = 3{,}98 + \frac{22}{l} \text{ Tonnen pro Meter}$$

„ $l = 50$ bis 100 Meter

$$p = 3{,}07 + \frac{67}{l} \text{ Tonnen pro Meter}$$

„ $l > 100$ Meter

$$p = 2{,}67 + \frac{107}{l} \text{ Tonnen pro Meter}$$

Für die Transversalkräfte:

18. für $l = 10$ bis 50 Meter

$$p = 4{,}30 + \frac{31}{l} \text{ Tonnen pro Meter}$$

„ $l = 50$ bis 100 Meter

$$p = 3{,}47 + \frac{72}{l} \text{ Tonnen pro Meter}$$

„ $l > 100$ Meter

$$p = 3{,}27 + \frac{92}{l} \text{ Tonnen pro Meter.}$$

Diese Regeln ändern sich natürlich, sobald andere Locomotiven und Wagen vorausgesetzt werden. Die von verschiedenen Autoren angenommenen Regeln sind daher ziemlich verschieden. Beispielsweise geben wir noch einige von Laissle und Schübler (Bau der Brückenträger, III. Aufl., 1869) und H. Schmidt (Förster's Bauzeitung, 1867) berechneten Zahlen.

l	Für die Momente				Für die Transversalkräfte	
	Laisle u. Schübler		Schmidt		Laissle u. Schübler	
	I	II	III	IV	I	II
	6,20	7,35	8,00	9,49	8,80	11,50
19	5,44	5,76	6,77	7,69	7,20	9,00
15	4,66	4,73	5,47	6,16	6,16	7,50
27	4,44	466	5,35	5,99	5,60	6,60
30	4,24	4,46	5,06	5,67	5,20	5,80
40	4,05	4,41	4,68	5,23	5,05	5,40
60	3,95	4,00	4,10	4,38	4,65	5,00
100	3,70	3,70	3,25	3,47	3,90	4,70
150	—	—	2,65	—	—	—

Hierbei ist vorausgesetzt:

I. 3 Locomotiven mit je 3 Locomotiv- und 3 Tenderachsen. Achsendruck der Locomotiven *12*, der Tender *6*, der Wagen *9 Tonnen*, Radstand der Locomotiven *2,0*, der Tender *1,5*, der Wagen *3,0 Meter*, Länge der Locomotiven *7,5*, der Tender *6,0 Meter*. Last der Locomotive und des Tenders pro Meter *4,00 Tonnen*, desgleichen der Wagen *3,00 Tonnen*.

II. 3 württembergische Güterzuglocomotiven mit je 3 Locomotiv- und 3 Tenderachsen. Achsendruck der Locomotive *12,0*, des Tenders *7,5 Tonnen*, Radstand der

Locomotiven *1,3* und *1,7* des Tenders *1,2* und *1,6 Meter*, Länge der Locomotive und des Tenders zusammen *13,5 Meter*. Wagen wie bei I. Last der Locomotive und des Tenders pro Meter *4,33 Tonnen*, desgleichen der Wagen *3,00 Tonnen*.

III. 3 Tender-Locomotiven, die erste rückwärts gehend. Druck der 3 Treibachsen *11,76*, der 2 übrigen Achsen *7,0* und *9,8 Tonnen*, der Wagenachsen *7,8 Tonnen*. Radstand der Treibachsen *1,35*, der Wagenachsen *3,48*^{m}. Länge der Locomotiven *11*, der Wagen *7,26 Meter*. Last der Locomotive pro Meter *4,73 Tonnen*, desgleichen der Wagen *2,15 Tonnen*.

IV. 3 Semmeringlocomotiven, die erste rückwärts gehend. Achsendruck der Treibachse im Maximum *13,72 Tonnen*, Radstand derselben *1,16 Meter*, Länge der Locomotive *10,75 Meter*. Wagen wie bei III. Last der Locomotive pro Meter *5,21 Tonnen*, desgleichen der Wagen *2,15 Tonnen*.

§. **24. Verordnung für Oesterreich.** Die Verordnung des österreichischen Handelsministeriums vom 30. August 1870, betreffend die bei Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beachtenden Sicherheitsrücksichten, enthält in Betreff der Belastung folgende Punkte, mit denen der Verfasser allerdings nicht vollständig einverstanden ist:

„§. 2. Die den Berechnungen zu Grunde zu legende zufällige Belastung ist für jedes Geleis pro laufend. Meter gleich vertheilt, je nach der Tragweite im Mindesten folgendermassen festgesetzt:

Bei 1 Meter Spannweite 20 Tonnen pro Meter,
„ 2 „ „ 15 „ „ „
„ 5 „ „ 10 „ „ „
„ 20 „ „ 5 „ „ „
„ 30 „ u. mehr „ 4 „ „ „

wobei für die dazwischen fallenden Tragweiten die nöthigen Interpolationen zu machen sind.

Insofern die vorstehende gleichmässige Belastung nicht eine grössere Inanspruchnahme hervorbringt, muss überdies in Rechnung genommen werden, dass über jedes Geleis mit *13 Tonnen* belastete Räderachsen zu gehen haben.

Bei continuirlichen Trägern muss darauf Rücksicht genommen werden, dass die gleich vertheilte Probelast in zwei (aber nicht mehrere) Stücke getrennt sein kann, so zwar, dass z. B. das zweite und vierte Brückenfeld beladen sind, während die drei an- oder dazwischen liegenden Felder unbelastet bleiben."

IV. Kapitel.

Einfluss der Querträger.

§. **25. Allgemeines.** In dem bisher Gesagten ist vorausgesetzt, dass die Lasten in jedem beliebigen Punkte des Trägers wirken können. In Wirklichkeit ist dies gewöhnlich nicht der Fall; vielmehr sind die

Hauptträger meist durch Querträger verbunden, so dass eine Uebertragung der Lasten, welche auf die Bahn wirken, auf die Hauptträger nur an denjenigen Stellen stattfinden kann, wo die Querträger angebracht sind.

Die Druckvertheilung der zufälligen Last auf die Querträger ist durch die Construction der Bahn bestimmt. Wir wollen voraussetzen, dass die Querträger durch einfache Längsträger verbunden seien, welche die Last unmittelbar aufzunehmen haben.

Im Folgenden wollen wir nun die Aenderungen untersuchen, welche durch diese Construction in der Grösse der Transversalkräfte und Momente herbeigeführt werden.

§. **26. Eigengewicht.** Das Eigengewicht der Brücke ist hier in zwei Theile zu zerlegen, nämlich 1. das Eigengewicht der Träger, und 2. das Eigengewicht der Bahn (incl. Querträger). Das erstere vertheilt sich gleichmässig, ist also ganz nach §. 11 zu behandeln. Die Transversalkraft lässt sich hiernach durch eine Gerade (Fig. 43), das Moment durch eine Parabel darstellen (Fig. 44). Das Gewicht der Bahn dagegen wirkt nur an den Querträgern und ist daher als ein System gleichgrosser Einzellasten ganz nach §. 11 zu behandeln. Die Transversalkraft ist hiernach zwischen je zwei Querträgern constant (Fig. 43), während sich das Moment durch ein Polygon darstellen lässt (Fig. 44), dessen Ecken auf einer Parabel liegen, da sich leicht nachweisen lässt, dass die Momente an den Querträgern dieselben sind, als bei gleichmässig vertheilter Last. Die Addition beider Theile giebt nun den Gesammteinfluss des Eigengewichtes.

Fig. 43.

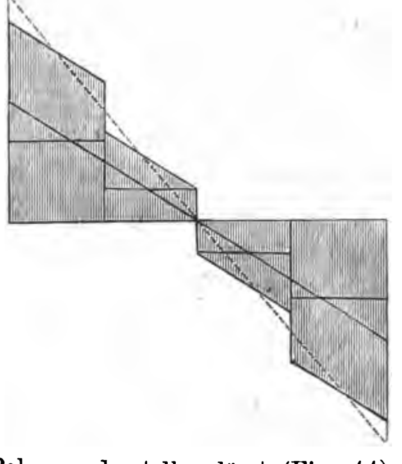


Fig. 44.

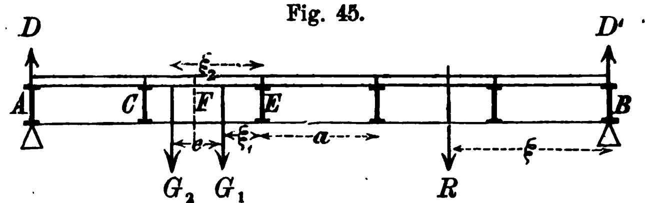
§. **27. Einfluss der zufälligen Last auf die Transversalkräfte.** *a*) System von Einzellasten. Zur Bestimmung des positiven Maximums von Q für einen zwischen den Querträgern C und E (Fig. 45) liegenden Querschnitt F sei die Resultante aller rechts von C liegenden Lasten R, ihr Abstand von der Stütze $B = \xi$; zwischen C und E mögen die beiden Lasten G_1 und G_2 im Abstande ξ_1, ξ_2 von E liegen. Der Druck auf den Querträger C ist bei dem Abstande a der Querträger

$= G_1 \frac{\xi_1}{a} + G_2 \frac{\xi_2}{a}$, der Stützendruck in A ist $R\frac{\xi}{l}$. Daher ist die Transversalkraft für den Punkt F:

$$Q = R\frac{\xi}{l} - G_1 \frac{\xi_1}{a} - G_2 \frac{\xi_2}{a}.$$

Wächst ξ, so vermindert sich ξ_1 und ξ_2 um gleichviel, so dass Q entweder fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen muss, natürlich nur so lange, als obiger Ausdruck für Q giltig bleibt. Hieraus folgt sofort:

Fig. 45.



Q wird zum positiven Maximum, wenn eine Last entweder bei C oder bei E oder bei B liegt, (wobei meist nur rechts von C Lasten liegen dürfen).

Ebenso wird Q zum negativen Maximum, wenn eine Last bei E oder bei C oder bei A liegt, (wobei meist nur links von E Lasten liegen dürfen).

Die Entscheidung lässt sich indess noch etwas bestimmter treffen. Liegt die Last G_2 bei C und ist der Abstand der Lasten G_1 und $G_2 = e$, so wird

$$Q = R\frac{\xi}{l} - G_1\left(1 - \frac{e}{a}\right) - G_2.$$

Rückt das System nach rechts, so dass G_2 nach E zu liegen kommt, so wird, wenn hierbei keine Last über B hinausrückt,

$$Q = R\frac{\xi - a + e}{l} - G_2\frac{e}{a}.$$

Der zweite Ausdruck ist grösser als der erste, wenn

$$a) \quad R a < (G_1 + G_2)\, l$$

ist. Diese Bedingung aber wird fast stets erfüllt sein.

Liegt eine Last G' an der Stütze B, so ist, wenn in R die Last G' nicht mit eingerechnet ist,

$$Q = R\frac{\xi}{l} - G_1\frac{\xi_1}{a} - G_2\frac{\xi_2}{a}.$$

Rückt man jetzt den Zug noch weiter nach rechts, so dass die an der Stütze liegende Last G' nicht mehr auf den Träger fällt, dass aber die Last G_1 neben E liegt, so wird, da die Verschiebung $= \xi_1$ ist,

$$Q = R\frac{\xi - \xi_1}{l} - G_2\frac{e}{a}.$$

Dieser Ausdruck wird grösser als der vorige, wenn

$$R\frac{\xi_1}{l} + G_2\frac{e}{a} < G_1\frac{\xi_1}{a} + G_2\frac{\xi_2}{a}$$

ist. Da $e = \xi_2 - \xi_1$ ist, so wird diese Bedingung

$$b) \quad Ra < (G_1 + G_2)\,l,$$

welche Bedingung mit der Bedingung a identisch ist.

Es wäre nur noch möglich, dass Q zum Maximum würde, wenn zwischen C und E gar keine Last liegt. Liegt die Last G_1 bei E, so ist

$$Q = R\frac{\xi}{l}.$$

Verschiebt man den Zug nach links, so dass die Last G_2 nach E zu liegen kommt, so wird, wenn hierbei keine neue Last auf den Träger rückt,

$$Q = R\frac{\xi + e}{l} - G_2\frac{e}{a}.$$

Der erste Ausdruck wird grösser als der zweite, wenn

$$c) \quad G_2 l < Re$$

ist. Bei grösseren Spannweiten ist diese Bedingung für alle Querschnitte erfüllt; bei kleineren Spannweiten indess kann sie für Querschnitte in der Nähe der Enden auch nicht erfüllt sein.

Sonach wird die Transversalkraft in der Regel zum positiven Maximum, wenn der Zug rechts vom linken Querträger C liegt und dabei das zweite oder das erste Rad beim rechten Querträger E liegt; zum negativen Maximum, wenn das Umgekehrte stattfindet.

Im ersten Falle wird, wenn $G', G'', G''', \ldots$ die einzelnen Lasten, $\xi', \xi'', \xi''', \ldots$ ihre Abstände von der rechten Stütze sind,

$$19. \quad \max(+Q) = G'\frac{\xi'}{l} + G''\frac{\xi''}{l} + G'''\frac{\xi'''}{l} + \ldots - G'\frac{e}{a}$$

und im zweiten Falle

$$20. \quad \max(+Q) = G'\frac{\xi'}{l} + G''\frac{\xi''}{l} + G'''\frac{\xi'''}{l} + \ldots.$$

Wendet man die Construction an, so construirt man für den ersten Fall die Transversalkraft nach §. 14 gerade so, als wenn die zweite Last am betreffenden Querschnitte liegt. Das Q für die ganze Strecke CE ist alsdann gleich dem Q für den Punkt E mehr $G'\frac{e}{a}$. Für den zweiten Fall construirt man die Transversalkraft nach §. 14 gerade so, als wenn die erste Last am Querschnitte liegt; das Q für die ganze Strecke CE ist alsdann gleich dem Q für den Punkt E.

Man ersieht hieraus, dass sich die Transversalkräfte kleiner ergeben, als wenn man auf die Querträger nicht Rücksicht nimmt.

Auf Tafel I ist in Fig. 3 ein Beispiel durchgeführt, wo auf die Spannweite von *12 Meter 6* Querträger kommen. Hiernach wird im vorliegenden Falle Q durchgängig zum Maximum, wenn das zweite Rad bei E liegt.

b) Gleichmässige Belastung. Die Last reiche von der rechten Stütze bis zu dem zwischen den Querträgern C und E liegenden Punkte H. Setzen wir $AC = x$, $CH = \xi$, so wird der linke Stützendruck $D = p\,\frac{(l-x-\xi)^2}{2l}$. Der Druck auf den Querträger C ist $= p\,\frac{(a-\xi)^2}{2a}$, mithin ist die Transversalkraft für jeden Querschnitt innerhalb CE

$$Q = \frac{1}{2}\,p\left[\frac{(l-x-\xi)^2}{l} - \frac{(a-\xi)^2}{a}\right].$$

Hiernach wird Q zum Maximum für $2ax = 2(l-a)\,\xi = o$, oder für

$$21.\quad \xi = \frac{ax}{l-a}.$$

Dies eingesetzt, giebt sehr einfach

$$22.\quad max\,(+Q) = \frac{1}{2}\,p\,(l-x-a)^2.$$

Auch hiernach ergiebt sich $max\,(+Q)$ stets kleiner, als ohne Rücksicht auf die Querträger.

§. 28. Einfluss der zufälligen Last auf die Momente.

a) System von Einzellasten. Ist wiederum R die Resultante aller Lasten, R' die Resultante der links von C liegenden Lasten, ξ, ξ' die Abstände derselben von B und liegen zwischen C und E wiederum zwei Lasten G_1 und G_2 mit den Abständen ξ_1, ξ_2 von E (Fig. 46), so ist das Moment für einen beliebigen Querschnitt F innerhalb CE, welcher von A den Abstand x, von C den Abstand z hat,

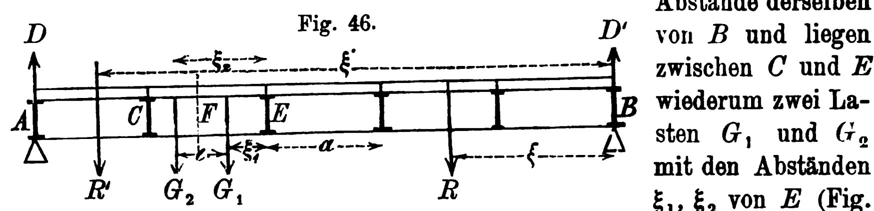


Fig. 46.

$$M = -R\frac{\xi}{l}\,x + R'\,(x + \xi' - l) + \frac{G_1\xi_1 + G_2\xi_2}{a}\,z.$$

Verschiebt man das ganze System nach links oder rechts, ohne dass eine Last vom Träger oder aus CE herausrückt, so ändert sich ξ, ξ', ξ_1 und ξ_2 um gleich viel; sonach wird sich M entweder fortwährend vergrössern oder fortwährend vermindern, woraus sofort folgt:

Das Moment wird innerhalb der Querträger C und E für einen beliebigen Querschnitt F zum Maximum, wenn entweder eine Last bei C oder eine Last bei E oder eine Last an einer Stütze liegt.

An den Querträgern ist das Moment genau dasselbe, als ohne Rücksicht auf die Querträger. Um daher das Moment für einen beliebigen Querschnitt bei einer beliebigen Belastung zu erhalten, wird man für diese Belastung nach §. 11 die Momente für die beiden benachbarten Querträger bestimmen und die so in der graphischen Darstellung erhaltenen Punkte durch eine Gerade verbinden.

So ist in dem Beispiele auf Tafel I das Moment für den Fall, dass eine Last an einer Stütze oder an einem Querträger liegt, mit Hülfe des Seilpolygons Fig. 6 dargestellt. Man sieht, dass im ersten Felde die Lage der I. Last am Querträger C die gefährlichste ist; im II. Felde dagegen ist nach einander die Lage der I. Last am Querträger C und die Lage der II. Last am Querträger E; im III. Felde endlich ist nach einander die Lage der II. Last am Querträger C und E die gefährlichste. Zwischen je zwei Querträgern wird hiernach das Maximalmoment in den Endfeldern durch Gerade, in den übrigen Feldern durch einspringende Polygone dargestellt.

In Fig. 4 (Taf. I) sind die Momente in Folge des Eigengewichtes und der zufälligen Last dargestellt. Man ersieht hieraus, dass es für die Anwendung immer genügen wird, die Momente für diejenigen Querschnitte zu ermitteln, an welchen die Querträger liegen und zwischen den Querträgern die Momentenlinie als geradlinig anzunehmen.

b) Gleichmässige Belastung. Liegt zwischen zwei beliebigen Querträgern C und E eine isolirte Last, so ist nach dem Vorigen das Moment bei C und bei E ebenso gross, als wenn keine Querträger vorhanden wären, also nach §. 12. negativ. Demnach muss auch das Moment für jeden Querschnitt innerhalb CE negativ sein. Folglich wird M für jeden beliebigen Querschnitt bei totaler Belastung zum Maximum. Bei dieser Belastung sind die Drücke auf alle mittleren Querträger gleich gross. Das Moment wird hier dargestellt durch ein Polygon, dessen Ecken den Querträgern entsprechen und in einer Parabel liegen, welche letztere das Moment ohne Rücksicht auf die Querträger darstellt.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Berücksichtigung der Querträger die Bestimmung der Transversalkräfte und Momente durchaus nicht erschwert.

V. Kapitel.

Continuirliche Gelenkträger.

§. 29. **Zweck.** Wenn man beim Vorhandensein mehrerer Oeffnungen die Träger continuirlich über die Oeffnungen hinwegführt, so entsteht hauptsächlich der Vortheil, dass die Momente wegen der Gegenwirkung der be-

nachbarten Oeffnungen durchschnittlich kleiner ausfallen. Dagegen entsteht der Nachtheil, dass die Vertheilung des Druckes auf die Stützen durch die Elasticität bestimmt wird und dass in Folge dessen die gegenseitige Höhenlage der Stützen von wesentlichem Einfluss auf die Druckvertheilung ist, so dass sich bei einer etwa eintretenden Aenderung dieser Höhenlage die Beanspruchung ändert. Dieser Nachtheil wird behoben, wenn man den Träger in mehrere Abtheilungen, welche gelenkartig mit einander verbunden sind, derart theilt, dass jeder Theil nur durch zwei Stützpunkte unterstützt ist. Diese Bedingung lässt sich in mehrfacher Weise erreichen, am besten wohl in der Weise, dass die aufeinander folgenden Oeffnungen abwechselnd kein Gelenk und zwei Gelenke erhalten (Fig. 47). Dieses

Fig. 47.

System wurde zuerst von Gerber vorgeschlagen und ist von ihm bereits bei einigen Brücken angewendet worden.

Es wäre auch möglich, in jede Oeffnung zwei Gelenke zu legen; allein in diesem Falle könnte den über den Pfeilern liegenden Theilen die nöthige Stabilität nur durch sehr breite Pfeiler gegeben werden. Wir beschränken uns auf die erstere Anordnung; die letztere ist ausführlich in „Ritter's Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen“ behandelt.

§. 30. Oeffnung mit zwei Gelenken.

1. **Einfluss des Eigengewichtes.** Der mittlere Theil CD (Fig. 48) verhält sich selbstverständlich genau so, wie ein einfacher Träger. Ist seine Länge $= b$, so ist der Druck auf die Punkte C und $D = \frac{1}{2} gb$. Nehmen wir C als Anfang der x an, so ist die Transversalkraft im Theile $CD: Q = \frac{1}{2} gb - gx = \frac{1}{2} g (b - 2x)$ und im Theile AC, wenn wir hier x negativ nehmen, $Q = \frac{1}{2} gb + g(-x) = \frac{1}{2} g (b - 2x)$, also allgemein

$$23. \quad Q = \frac{1}{2} g (b - 2x),$$

so dass die Transversalkraft genau dieselbe bleibt, wie bei einem einfachen Träger (Fig. 48, Gerade gg). Das Moment ist im Theile $CD: M = -\frac{1}{2} gbx + \frac{1}{2} gx^2 = -\frac{1}{2} g x (b - x)$ und im Theile $AC: M = \frac{1}{2} gb \cdot (-x) + \frac{1}{2} gx^2 = -\frac{1}{2} gx (b - x)$, also allgemein

$$24. \quad M = -\frac{1}{2} gx (b - x),$$

wonach sich das Moment durch eine Parabel darstellen lässt (Fig. 48, Linie gg). Bezeichnen wir das Moment am Pfeiler A mit M_1, das Moment in der Mitte von CD mit M_0, so wird, wenn wir $AC = a$ setzen,

$$25. \quad M_1 = \frac{1}{2} g a (a + b), \qquad M_0 = -\frac{1}{8} g b^2.$$

Beide Momente werden gleich, wenn $4a(a + b) = b^2$ ist. Hieraus folgt $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} b = 0{,}207 b$ oder $b = \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0{,}707\, l$, $a = 0{,}147\, l$.

2. **Einfluss der zufälligen Last.** *a*) Transversalkraft. Im mittleren Theile CD wird für einen beliebigen Punkt E die Transversalkraft Q zum positiven oder negativen Maximum, je nachdem der Theil DE oder CE belastet ist und zwar ist

$$26. \quad max\,(+Q) = +\frac{1}{2} p b \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2, \qquad max\,(-Q) = -\frac{1}{2} p b \frac{x^2}{b^2}.$$

Ist nun R der in C vom mittleren Theile auf den Theil AC geübte Druck und liegt zwischen dem beliebigen Punkte F und C eine Last G, so ist für den Punkt F: $Q = R + G$. Negativ kann hiernach Q nicht werden. Zum positiven Maximum wird Q, wenn R und G möglichst gross sind, d. h. wenn die ganze Länge FC belastet ist und zwar wird alsdann $max\,(+Q) = \frac{1}{2} p b + p(-x)$, d. i.

$$27. \quad max\,(+Q) = \frac{1}{2} p (b - 2x),$$

Fig. 48.

Die Belastung der Theile AF und BD ist gleichgültig, so dass also auch das ganze Feld belastet sein kann. Hiernach besteht nun die Linie, welche $max\,(+Q)$ darstellt (Fig. 48, Linien $p p_2 p_1$), aus einer Geraden und einer Parabel; beide gehen tangential in einander über.

b) Moment. Im mittleren Theile kann das Moment M nur negativ werden; es wird zum Maximum bei totaler Belastung dieses Theiles und zwar ist $M = -\frac{1}{2} p x (b - x)$. Das Moment im Punkte F des Theiles AC ist, wenn zwischen F und C eine Last G im Abstande ξ von F liegt, $= R \cdot (-x) + G \xi$. Hiernach kann M im Theile AC nur positiv

werden; damit M möglichst gross werde, muss R und $G\xi$ möglichst gross sein, es muss also die ganze Länge FD belastet sein; die Belastung der übrigen Theile ist gleichgültig. Es wird alsdann $M = \frac{1}{2} g b . (-x) + \frac{1}{2} g x^2 = -\frac{1}{2} p x (b - x)$, also allgemein

$$28. \quad M = -\frac{1}{2} p x (b - x).$$

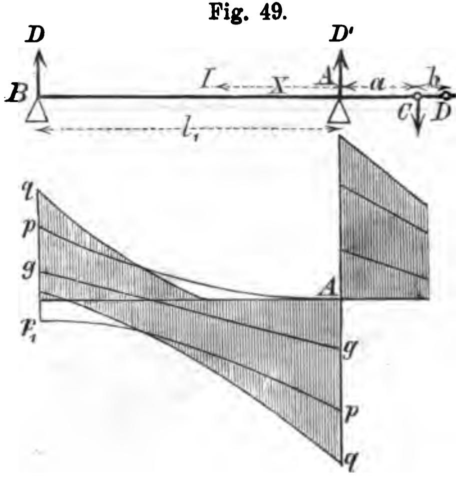
Das Gesetz bleibt also dasselbe, wie für das Eigengewicht (Fig. 48, Linie pp).

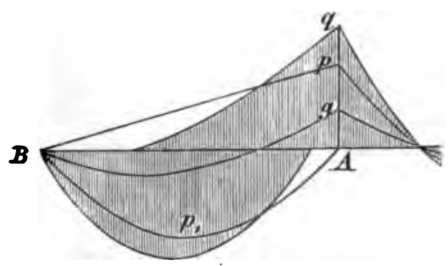
In Fig. 48 entsprechen die schraffirten Flächen der gleichzeitigen Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Last.

§. 31. Endöffnung ohne Gelenk.

1. **Einfluss des Eigengewichtes.** Sind D und D' die Stützendrücke in B und A (Fig. 49), so ergiebt sich, wenn man die Spannweite AB mit l_1, die Länge AC mit a bezeichnet und beachtet, dass im Gelenke C eine Kraft $\frac{1}{2} g b$ nach abwärts wirkt, $D l_1 + \frac{1}{2} g a^2 + \frac{1}{2} g a b = \frac{1}{2} g l_1^2$ und $D' l_1 = \frac{1}{2} g (l_1 + a)^2 + \frac{1}{2} g b (l_1 + a)$, mithin, wenn man zur Abkürzung $\frac{a(a+b)}{l_1} = c_1$ setzt,

Fig. 49.





$$D = \frac{1}{2} g (l_1 - c_1),$$

$$D' = \frac{1}{2} g (l_1 + 2a + b + c_1).$$

Die Transversalkraft im beliebigen Abstande x von B (Linie gg) wird

$$29. \quad Q = D - gx = \frac{1}{2} g (l_1 - c_1 - 2x).$$

Die beiden Maximaltransversalkräfte in B und A werden daher

$$30. \quad Q' = +\frac{1}{2} g (l_1 - c_1), \qquad Q'' = -\frac{1}{2} g (l_1 + c_1).$$

Das Moment im Abstande x von B (Linie Bg) wird

$$31. \quad Mx = -D + \frac{1}{2} g^2 x = -\frac{1}{2} g x (l_1 - c_1 - x).$$

Zum analystischen (negativen) Maximum wird M für $x = \frac{1}{2}(l_1 - c_1)$ und zwar wird das entsprechende M:

$$32. \quad M_0 = -\frac{1}{8} g (l_1 - c_1)^2.$$

Zum positiven Maximum wird M für $x = l$, und zwar ist das entsprechende Moment

$$33. \quad M_1 = +\frac{1}{2} g l_1 c_1 = \frac{1}{2} g a (a + b).$$

2. **Einfluss der zufälligen Last.** Wirkt nur innerhalb AC eine Last und der Druck R in C, so ist offenbar der Stützendruck D in B negativ. Da nun $Q = D$, $M = - Dx$ wird, also Q negativ, M positiv wird, so folgt sofort:

Für das positive Maximum der Transversalkraft und das negative Maximum des Momentes darf die ganze Strecke AD nicht belastet sein; für das negative Maximum der Transversalkraft und das positive Maximum des Momentes dagegen muss die ganze Strecke AD belastet sein.

Für die Belastung des Feldes AB selbst ergiebt sich dieselbe Regel wie für den einfachen Träger (siehe §. 20 und 21).

Für die Belastung des Feldes AB selbst wird nach §. 20 $max\,(+Q) = +\frac{1}{2} p l_1 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2$, $max\,(-Q) = -\frac{1}{2} p l_1 \left(\frac{x}{l_1}\right)^2$, und nach §. 19 $max\,(+M) = 0$, $max\,(-M) = -\frac{1}{2} px\,(l - x)$. Für die Belastung der Strecke AD dagegen wird, wenn diese Strecke nicht belastet wird, $Q = 0$, $M = 0$, wenn sie total belastet ist, $Dl_1 + \frac{1}{2} pa^2 + \frac{1}{2} pba = 0$, $D = -\frac{1}{2} pa \frac{a+b}{l_1} = -\frac{1}{2} pc_1$, also $Q = -\frac{1}{2} pc_1$, $M = +\frac{1}{2} pc_1 x$. Durch Addition beider Ausdrücke ergiebt sich nun

$$34. \quad \begin{cases} max\,(+Q) = +\frac{1}{2} p l_1 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right), \\ max\,(-Q) = -\frac{1}{2} p l_1 \left[\frac{c_1}{l_1} + \left(\frac{x}{l_1}\right)^2\right]. \end{cases}$$

$$35. \quad max\,(+M) = +\frac{1}{2} p c_1 x, \quad max\,(-M) = -\frac{1}{2} px\,(l_1 - x).$$

In Fig. 49 ist $max\,Q$ durch die Linien Ap, pp_1, $max\,M$ durch die Linien Bp, Ap_1B dargestellt. Die schraffirte Fläche entspricht den durch das Eigengewicht und die zufällige Last erzeugten Werthen.

Beispielsweise wird für $l_1 = 0{,}8l$, $a = 0{,}2l = 0{,}25l_1$, $b = 0{,}6l = 0{,}75l_1$, $c_1 = \frac{0{,}2l \cdot 0{,}8l}{0{,}8l} = 0{,}2l = 0{,}25l_1$, mithin

$$max\,(+Q) = gl\left(0{,}3 - 0{,}8\frac{x}{l_1}\right) + 0{,}4pl\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2$$
$$max\,(-Q) = gl\left(0{,}3 - 0{,}8\frac{x}{l_1}\right) - 0{,}4pl\left(\frac{x}{l_1}\right)^2$$
$$max\,(+M) = 0{,}8gl^2\frac{x}{l_1}\left(0{,}3 - 0{,}4\frac{x}{l_1}\right) + 0{,}08pl^2\frac{x}{l_1}$$
$$max\,(-M) = 0{,}8gl^2\frac{x}{l_1}\left(0{,}3 - 0{,}4\frac{x}{l_1}\right) - 0{,}32pl^2\frac{x}{l_1}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right).$$

Fig. 49 giebt die entsprechende graphische Darstellung.

§. **32. Mittelöffnung ohne Gelenk.** Wir setzen voraus, dass an die Oeffnung AA_1 (Fig. 50) ohne Gelenk zwei gleiche Oeffnungen mit Gelenken stossen. Die Länge von AA_1 sei l_2.

1. **Einfluss des Eigengewichtes.** Die beiden Stützendrücke sind hier gleich, und zwar ist jeder, da die auf CC_1 liegende Last $= g(l_2 + 2a)$ ist und ausserdem in jedem der Gelenke C, C_1 die Last $\frac{1}{2}gb$ wirkt, $D = \frac{1}{2}[g(l_2 + 2a) + gb]$, d. i.

$$D = \frac{1}{2}g(l_2 + 2a + b).$$

Die Transversalkraft im Abstande x von A (Linie gg) ist nun $Q = D - \frac{1}{2}gb - g(a + x)$, d. i.

$$36. \quad Q = \frac{1}{2}g(l_2 - 2x)$$

und das Moment in demselben Punkte (Linie gg) $M = -Dx + \frac{1}{2}gb(a + x) + \frac{1}{2}g(a + x)^2$, d. i.

$$37. \quad M = \frac{1}{2}g\,[a(a + b) - x(l_2 - x)].$$

2. **Einfluss der zufälligen Last.** In den Gelenken C, C_1 mögen die anstossenden Träger den Druck R, R_1 ausüben. Ausserdem wirke im Abstande ξ, ξ_1 von A, A_1 in den Theilen AC, A_1C_1 die Lasten G, G_1. Alsdann ist $Dl_2 + R_1a + G_1\xi_1 = R(l_2 + a) + G(l_2 + \xi)$, mithin

$$D = \frac{R(l_2 + a) - R_1a + G(l_2 + \xi) - G_1\xi_1}{l_2}.$$

Demnach wird

$$Q = \frac{(R - R_1)a + G\xi - G_1\xi_1}{l_2}$$

und

$$M = +(Ra + G\xi)\left(1 - \frac{x}{l_2}\right) + (R_1a + G_1\xi_1)\frac{x}{l_2}.$$

Hieraus folgt für die gefährlichste Belastungsweise sofort:

Die Transversalkraft wird zum positiven und negativen Maximum, wenn bezüglich der linke Theil $A_1 D_1$ oder der rechte Theil AD vollständig belastet ist. Das Moment wird zum positiven Maximum, wenn die anstossenden Theile AD und $A_1 D_1$ vollständig belastet sind, zum negativen Maximum, wenn diese Theile nicht belastet sind.

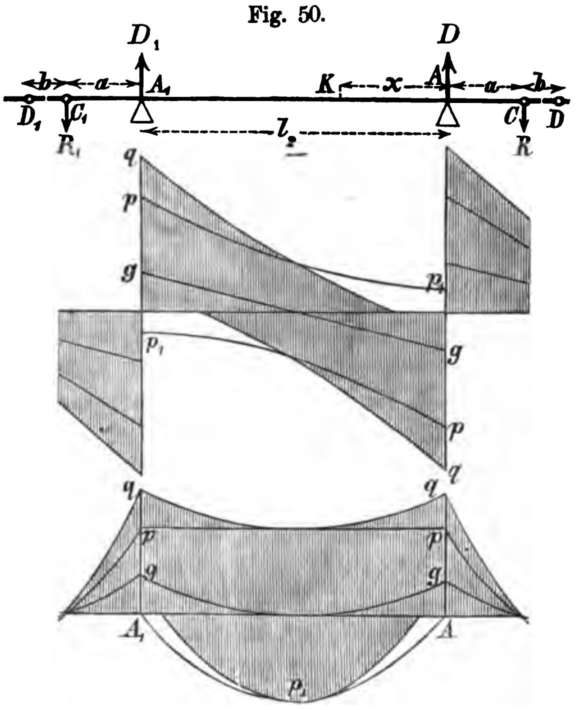


Fig. 50.

Für die Belastung des Feldes AA_1 ergiebt sich dieselbe Regel, wie für den einfachen Träger (nach §. 20 u. 21).

Für die Belastung des Feldes AA_1 selbst wird nach §. 20

$max\,(+Q) = +\frac{1}{2} p l_2 \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^2$, $max\,(-Q) = -\frac{1}{2} p l_2 \left(\frac{x}{l_2}\right)^2$ und nach §. 19 $max\,(+M) = 0$, $max\,(-M) = -\frac{1}{2} p x (l - x)$. Für die Belastung von AC ergiebt sich $D = \frac{pb(l_2 + a)}{2l_2} + \frac{pa(2l_2 + a)}{2l_2}$, also $Q = D - \frac{1}{2} pb - pa = \frac{1}{2} p \frac{a(a+b)}{l_2}$, oder, wenn wir $\frac{a(a+b)}{l_2} = c_2$ setzen, $Q = +\frac{1}{2} pc_2$ und $M = +\frac{1}{2} pa(a+b)\left(1 - \frac{x}{l_2}\right) = +\frac{1}{2} p l_2 c_2 \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)$. Für die Belastung von $A_1 C_1$ ergiebt sich $D = -\frac{1}{2} p \frac{a(a+b)}{l_2} = -\frac{1}{2} pc_2$, also $Q = D = -\frac{1}{2} pc_2$, $M = -Dx = +\frac{1}{2} pc_2 x$; für die Belastung beider Theile AC und $A_1 C_1$ wird $Q = 0$, $M = \frac{1}{2} p l_2 c_2$. Demnach ergiebt sich durch entsprechende Summirung

$$38.\quad \begin{cases} max\,(+Q) = +\frac{1}{2} p l_2 \left[\left(1 - \frac{x}{l_3}\right)^2 + \frac{c_2}{l_2}\right], \\ max\,(-Q) = -\frac{1}{2} p l_2 \left[\left(\frac{x}{l_2}\right)^2 \cdot \frac{c_2}{l_2}\right]; \end{cases}$$

$$39.\quad max\,(+M) = \frac{1}{2} p l_2 c_2, \quad max\,(-M) = -\frac{1}{2} px(l_2 - x).$$

In Fig. 50 ist *max* Q durch die Parabeln pp und $p_1 p_1$, *max* M durch die Gerade pp und die Parabel $A p_1 A_1$ dargestellt.

Beispielsweise ergiebt sich für $l_2 = 0{,}8 l$, $a = 0{,}2 l = 0{,}25 l_2$, $b = 0{,}6 l = 0{,}75 l_2$ $c_2 = \frac{0{,}2 l \,.\, 0{,}8 l}{0{,}8 l} = 0.2 l = 0{,}5 l_2$:

$$max\,(+Q) = 0{,}4 g l \left(1 - 2\frac{x}{l_2}\right) + 0{,}4 p l \left[0{,}25 + \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)^2\right],$$

$$max\,(-Q) = 0{,}4 g l \left(1 - 2\frac{x}{l_2}\right) - 0{,}4 p l \left[0{,}25 + \left(\frac{x}{l_2}\right)^2\right].$$

$$max\,(+M) = 0{,}32 g l^2 \left[0{,}25 - \frac{x}{l_2}\left(1 - \frac{x}{l_2}\right)\right] + 0{,}08 p l,$$

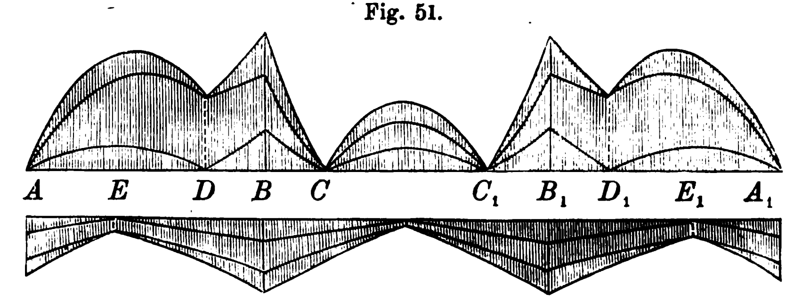
$$max\,(-M) = 0{,}32 g l^2 \left[0{,}25 - \frac{x}{l_2}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)\right] - 0{,}32 p l^2 \frac{x}{l_2}\left(1 - \frac{x}{l_2}\right).$$

Fig. 50 giebt die entsprechende graphische Darstellung.

§. 33. Mittelwerthe der Transversalkräfte und Momente.

Von besonderer Wichtigkeit ist, die Mittelwerthe der Transversalkräfte und Momente oder die arithmetischen Mittel derselben kennen zu lernen, weil von diesen, wie wir später noch specieller nachweisen werden, die Materialmenge der Träger abhängt. Wir berücksichtigen hierbei aber nur den absoluten Werth von Q und M, tragen also in der graphischen Darstellung alle Werthe von Q und M auf derselben Seite der Abscissenaxe auf (Fig. 50 und 51) und behalten ausserdem von den beiden Maximalwerthen von Q und M nur den absolut grösseren Werth bei, weil durch diesen im Allgemeinen die Stärke der Constructionstheile bedingt ist. Man erhält diese Mittelwerthe durch Verwandlung der Flächen, welche von den Linien, welche die Transversalkräfte und Momente darstellen, mit den Abscissenaxen bilden, die **Transversalkraftfläche** und **Momen-**

Fig. 51.



tenfläche, in ein gleich langes Rechteck. Wir bezeichnen diese Flächen bezüglich mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$. Da diese Flächen von Geraden und Parabeln eingeschlossen werden, so lassen sich dieselben leicht berechnen. Wir begnügen uns daher, im Folgenden nur die betreffenden Formeln aufzustellen.

1. **Mittelfeld mit zwei Gelenken** (Fig. 51, II). Die Länge sei $BB_1 = l$; ferner sei $BC = B_1 C_1 = a$, $CC_1 = b$.

$$40. \quad \mathfrak{Q} = \tfrac{1}{4} g l^2 + \tfrac{1}{24} p\,(6 l^2 + b^2),$$

$$41. \quad \mathfrak{M} = \tfrac{1}{24}(g + p)\,(l^3 - 3 l b^2 + 4 b^3).$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$a =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	$.\,l$
$\mathfrak{Q} =$	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	$.\,g l^2$
$+$	0,2917	0,2767	0,2650	0,2567	0,2517	$.\,p l^2$
$\mathfrak{M} =$	0,08333	0,04700	0,03267	0,03233	0,03800	$.\,g l^3$
$+$	0,08333	0,04700	0,03267	0,03233	0,03800	$.\,p l^3$

2. **Endfeld mit einem Gelenke** (Fig. 52, I u. III). Die Länge sei $AB = l_1$; ferner sei $BC = a$, $AC = b$; es ist dann $AE = \frac{1}{2} b$.

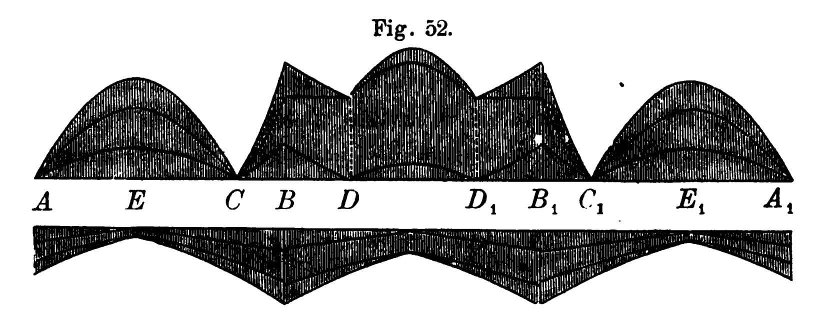
42. $\mathfrak{Q} = \frac{1}{4} g (l_1^2 + a^2) + \frac{1}{24} p (7 l_1^2 - 2 l_1 a + 7 a^2)$
$= \frac{1}{4} g (b + a)^2 + \frac{1}{24} [7 b^2 + 12 a (b + a)]$

43. $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} (g + p) (l_1^3 - 3 l_1^2 a + 6 l_1 a^2 - 2 a^3)$
$= \frac{1}{12} (g + p) (b^3 + 3 b a^2 + 2 a^3)$.

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$a =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	$.\,l$
$\mathfrak{Q} =$	0,2500	0,2050	0,1700	0,1450	0,1300	$.\,g l^2$
$+$	0,2917	0,2292	0,1850	0,1502	0,1317	$.\,p l^2$
$\mathfrak{M} =$	0,08333	0,04483	0,02533	0,01883	0,01933	$.\,g l^3$
$+$	0,08333	0,04483	0,02533	0,01883	0,01933	$.\,p l^3$

Fig. 52.



3. **Endfeld ohne Gelenk** (Fig. 51, I u. III). Die Länge sei l_2 und $c_2 = \frac{a(a + b)}{l_2} = \frac{a(l - a)}{l_2}$. Hierbei ist $BD = B_1 D_1 = c_2$, $AE = A_1 E_1 = \frac{1}{2} (l_2 - c_2)$.

44. $\mathfrak{Q} = \frac{1}{4} g (l_2^2 + c_2^2) + \frac{1}{24} p (7 l_2^2 + 12 l_2 c_2 + 6 c_2^2)$.

45. $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} g (l_2^3 - 3 l_2^2 c_2 + 6 l_2 c_2^2 - 2 c_2^3) + \frac{1}{12} p (l_2^3 + 3 l_2 c_2^2 - c_2^3)$.

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

	$\frac{l_2}{l}$		$\frac{a}{l} = 0$	$\frac{a}{l} = 0,1$	$\frac{a}{l} = 0,2$	$\frac{a}{l} = 0,3$	$\frac{a}{l} = 0,4$	
𝔔	0,50		0,0625	0,0706	0,0881	0,1066	0,1201	$. g l^2$
		+	0,0729	0,1260	0,1785	0,2220	0,2505	$. p l^2$
	0,75		0,1406	0,1442	0,1520	0,1602	0,1662	$. g l^2$
		+	0,1641	0,2127	0,2554	0,2887	0,3097	$. p l^2$
	1,00		0,2500	0,2520	0,2564	0,2610	0,2644	$. g l^2$
		+	0,2917	0,3387	0,3781	0,3994	0,4261	$. p l^2$
	1,25		0,3906	0,3919	0,3947	0,3977	0,3998	$. g l^2$
		+	0,4510	0,5035	0,5523	0,5678	0,5849	$. p l^2$
𝔐	0,50		0,01042	0,00630	0,01056	0,01592	0,01959	$. g l^3$
		+	0,01042	0,01397	0,02049	0,02629	0,03000	$. p l^3$
	0,75		0,03515	0,02339	0,02060	0,02152	0,02310	$. g l^3$
		+	0,03515	0,03801	0,04288	0,04803	0,05162	$. p l^3$
	1,00		0,08333	0,06476	0,05546	0,05134	0,04983	$. g l^3$
		+	0,08333	0,08529	0,08940	0,09359	0,09658	$. p l^3$
	1,25		0,15904	0,13785	0,12273	0,11398	0,11020	$. g l^3$
		+	0,15904	0,16426	0,16770	0,17118	0,17369	$. p l^3$

4. **Mittelfeld ohne Gelenk** (Fig. 52, II). Die Länge sei $BB_1 = l_3$ und $c_3 = \frac{a(a+b)}{l_3} = \frac{a(l-a)}{l_3}$, $k_3 = l_3 - 4c_3$. Alsdann ist $DD_1 = \sqrt{l_3 k}$. In Betreff der Momente sind zwei Fälle zu unterscheiden; ist $c_3 < \frac{1}{4} l_3$, so ist DD_1 reel; M kann alsdann in Betreff des Eigengewichtes negativ werden und in Betreff der zufälligen Last kann *max* $(- M)$ grösser als das constante *max* $(+ M)$ werden; die Momentenfläche besteht alsdann aus drei Theilen. Ist dagegen $c_3 > \frac{1}{4} l_3$, so wird DD_1 imaginär; M ist alsdann in Betreff des Eigengewichtes nur positiv und in Betreff der zufälligen Last ist *max* $(- M)$ kleiner als das constante *max* $(+ M)$, so dass hier die Momentenfläche nur aus einem einzigen Theile besteht.

$$46. \quad \mathfrak{Q} = \tfrac{1}{4} g l_3^2 + \tfrac{1}{24} p l_3 (7 l_3 + 12 c_3).$$

$$47. \quad c_3 < \tfrac{1}{4} l_3 : \mathfrak{M} = \tfrac{1}{24} g l_3 [l_3^2 + 4 k_3 \sqrt{l_3 k_3} - 3 l_3 k_3] + \tfrac{1}{12} p l_3 [k_3 \sqrt{l_3 k_3} + 6 l_3 c_3].$$

$$48. \quad c_3 > \tfrac{1}{4} l_3 : \mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} g l_3^2 (6 c_3 - l_3) + \tfrac{1}{2} p l_3^2 c_3.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

	$\frac{l_2}{l}$		$\frac{a}{l}=0$	$\frac{a}{l}=0,1$	$\frac{a}{l}=0,2$	$\frac{a}{l}=0,3$	$\frac{a}{l}=0,4$	
$\mathfrak{Q}$	0,50		0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	$.\,g\,l^2$
		+	0,0729	0,1179	0,1529	0,1779	0,1929	$.\,p\,l^2$
	0,75		0,1406	0,1406	0,1406	0,1406	0,1406	$.\,g\,l^2$
		+	0,2188	0,2854	0,3521	0.4154	0,4854	$.\,p\,l^2$
	1,00		0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	$.\,g\,l^2$
		+	0,2917	0,3367	0,3721	0,3967	0,4117	$.\,p\,l^2$
	1,25		0,3906	0,3906	0,3906	0,3906	0,3906	$.\,g\,l^2$
		+	0,4557	0,5007	0,5357	0,5607	0,5757	$.\,p\,l^2$
$\mathfrak{M}$	0,50		0,01042	0,01208	0,02958	0,04208	0,04959	$.\,g\,l^3$
		+	0,01042	0,02250	0,04000	0,05250	0,06000	$.\,p\,l^3$
	0,75		0,03515	0,01345	0,02483	0,04859	0,05484	$.\,g\,l^3$
		+	0,03515	0,04135	0,06000	0,07875	0,09000	$.\,p\,l^3$
	1,00		0,08333	0,04700	0,03267	0,03283	0,03800	$.\,g\,l^3$
		+	0,08333	0,08767	0,09800	0,11033	0,12067	$.\,p\,l^3$
	1,25		0,15614	0,11332	0,08491	0,07085	0,06517	$.\,g\,l^3$
		+	0,15614	0,16617	0,17383	0,18243	0,18897	$.\,p\,l^3$

Für den Grenzfall $c_3 = \frac{1}{4}\, l_3$ wird einfacher:

49. $\mathfrak{Q} = \frac{1}{4}\, g\, l_3{}^2 + \frac{5}{12}\, p\, l_3{}^2.$

50. $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}\, g\, l_3{}^3 + \frac{1}{8}\, p\, l_3{}^3.$

Dieser Fall tritt ein, wenn $\frac{a\,(l-a)}{l_3} = \frac{l_3}{4}$ oder $a^2 - a\,l + \frac{1}{4}\, l_3{}^2 = 0$, oder

51. $a = \frac{1}{2}\,(l - \sqrt{l^2 - l_3{}^2})$

ist. Für die vorstehende Tabelle tritt der Grenzfall nur bei $\frac{l_2}{l} = 0,50$ und $0,75$ ein, und zwar wird für denselben:

$\frac{l_2}{l} = 0,50 \quad \frac{a}{l} = 0,0670 \quad \mathfrak{M} = 0,00521\, g l^3 + 0,01563\, p\, l^3.$

$\frac{l_2}{l} = 0,75 \quad \frac{a}{l} = 0,1047 \quad \mathfrak{M} = 0,01758\, g l^3 + 0,05273\, p\, l^3.$

Mit Hülfe der aufgestellten Formeln oder Tabellen ist es nun in jedem Falle leicht, den Werth für $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{M}$ für die sämmtlichen Oeffnungen zu bestimmen. In den Tabellen ist zu diesem Zwecke für alle vier Fälle die Spannweite l des Feldes mit zwei Gelenken als Massstab angenommen, so dass man die Zahlen der entspre-

chenden Tabellen direct addiren kann. Sind beispielsweise 3 Oeffnungen vorhanden, von denen die mittlere zwei Gelenke hat (Fig. 51), so wird nach den Tabellen z. B. für $\frac{l_2}{l} = 0,75$ und $\frac{a}{l} = 0,2$,

$$\mathfrak{Q} = (0,2500 + 2 . 0,1520)\, g l^2 + (0,2650 + 2 . 0,2554)\, p l^2$$
$$= 0,5540\, g l^2 + 0,7758\, p l^2,$$
$$\mathfrak{M} = (0,03267 + 2 . 0,02060)\, g l^3 + (0,03267 + 2 . 0,04288)\, p l^3$$
$$= 0,07387\, g l^2 + 0,11843\, p l^2.$$

Bezeichnet man die mittlere Spannweite, d. h. das arithmetische Mittel aus allen Spannweiten, mit λ, so ist $\frac{3}{4}\, l + l + \frac{3}{4}\, l = 3\lambda$, mithin $l = 1,2\lambda$, $l^2 = 1,44\lambda^2$, $l^3 = 1,728\lambda^3$; daher wird auch

$$\mathfrak{Q} = 0,7978\, g\lambda^2 + 1,1172\, p\lambda^2,$$
$$\mathfrak{M} = 0,1277\, g\lambda^3 + 0,2047\, p\lambda^2.$$

Wählt man für alle drei Oeffnungen einfache Träger und alle drei Oeffnungen gleich weit, so ergiebt sich (für $\frac{a}{l} = 0$) $\mathfrak{Q} = 3 . 0,25\, g\lambda^2 + 3 . 0,2917\, p\lambda^3 = 0,75\, g\lambda^2 + 0,8751\, p\lambda^2$, $\mathfrak{M} = 3 . 0,08333\, (g + p)\lambda^3 = 0,25\, g\lambda^3 + 0,25\, p\lambda^3$. Für den continuirlichen Gelenkträger ergiebt sich demnach die Transversalkraftfläche etwas grösser, die Momentenfläche wesentlich kleiner als für die einfachen Träger.

§. **34. Günstigste Verhältnisse.** Auf die genaue Bestimmung der günstigsten Verhältnisse der Spannweiten, sowie die günstigsten Lagen der Gelenke können wir erst später eingehen. Wir wollen hier nur diejenigen Verhältnisse ermitteln, welche in Betreff der Momente die günstigsten sind. Wir erhalten hierdurch für specielle Constructionen (Parallelträger) nahezu die wirklich günstigsten Verhältnisse, weil die Transversalkräfte für verschiedene Verhältnisse nahezu constant bleiben.

1. **Constanter Querschnitt.** Wenn man den Querschnitt des Trägers constant lässt, so ist (bei gleichem Sicherheitscoefficienten für Zug und Druck) nur das absolut grösste Moment massgebend. Wir bezeichnen unter der Annahme dreier Oeffnungen das Moment an den Mittelstützen mit M_1, die negativen Maximalmomente im ersten und zweiten Felde mit M', M''.

D a s M i t t e l f e l d h a b e z w e i G e l e n k e, die Endfelder also kein Gelenk (Fig. 51). Alsdann ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$M_1 = \frac{1}{4}\, q a (a + b) = \frac{1}{8}\, q\, (l^2 - b^2),$$
$$M'' = \frac{1}{8}\, q b^2, \quad M' = \frac{1}{8q}\left[q l_2 - \frac{1}{4}\, g\left(\frac{l^2 - b^2}{l_2}\right)\right]^2,$$

worin l die Länge des Mittelfeldes, l_2 die Länge jedes äusseren Feldes bedeutet. Nehmen wir nun zunächst l und l_2 constant an und ändern nur b. Wenn b wächst, so nimmt M_1 ab, M' zu und M'' ebenfalls zu. Der grösste der drei Werthe M_1, M' und M'' wird daher am kleinsten, wenn b so gross ist, dass entweder $M_1 = M'$ oder $M_1 = M''$ wird.

Wir ändern jetzt, indem wir die Gesammtlänge $2 l_2 + l = 3\lambda$ constant lassen, das Verhältniss von $l_2 : l$. Nehmen wir zunächst l_2 klein

an, so dass M' kleiner als M'' und M_1 ist; es muss alsdann nach dem Vorigen $M_1 = M''$ sein. Diese Beziehung giebt ein bestimmtes Verhältniss zwischen b und l, nämlich $l^2 - b^2 = b^2$ oder

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0{,}707 l.$$

Lassen wir jetzt l_2 wachsen, so nimmt l ab, mithin nimmt M' zu, M_1 und M'' dagegen ab. Der grösste beider Werthe wird somit am kleinsten, wenn

$$M_1 = M' = M''$$

ist. Für $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, l$ wird $M_1 = M'' = \frac{1}{16} q l^2$, $M' = \frac{1}{8q}\left[q l_2 - \frac{1}{16} g \frac{l^2}{l_2}\right]^2$. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke giebt die quadratische Gleichung

$$\left[\frac{l_2}{l}\right]^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l_2}{l} - \frac{g}{16 q} = 0.$$

Ist keine zufällige Last vorhanden, so wird $\frac{g}{q} = 1$, mithin

$$\frac{l_2}{l} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} = 0{,}7866.$$

Für dieses Verhältniss wird $l = 1{,}166 \lambda$ und $M_1 = M' = M'' = \frac{1}{16} q l^2$ $= 0{,}08495\, q \lambda^2$. Ist nun ferner das Eigengewicht so klein, dass es gegen die zufällige Last zu vernachlässigen ist, so ist $\frac{g}{q} = 0$ zu setzen, mithin wird

$$\frac{l_2}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071.$$

Für dieses Verhältniss wird $l = 1{,}243 \lambda$, $M_1 = M' = M'' = \frac{1}{16} q l^2$ $= 0{,}09651\, q \lambda^2$.

Für einfache Träger mit der Spannweite λ wird das Maximalmoment $\frac{1}{8} q \lambda^2 = 0{,}125\, q \lambda^2$, also um *30 bis 47 Procent* grösser, als für den continuirlichen Gelenkträger.

In gleicher Weise würden sich nun auch andere Fälle behandeln lassen.

2. **Variabler Querschnitt.** Wenn der Querschnitt dem Momente entsprechend variabel ist, so ist das mittlere Moment oder die Momentenfläche massgebend. Wir betrachten zunächst wieder den Fall dreier Oeffnungen, deren mittlere zwei Gelenke hat (Fig. 51). Bezeichnet man die Momentenfläche des Feldes mit zwei Gelenken mit M_1, die eines Endfeldes ohne Gelenk mit M_2, so ist die ganze Momentenfläche $M = M_1 + 2 M_2$. Hiernach ergiebt sich mit Hülfe der Tabellen des vorigen §.:

	$\frac{l_2}{l} =$		$\frac{a}{l} = 0,1$	$\frac{a}{l} = 0,2$	$\frac{a}{l} = 0,3$	$\frac{a}{l} = 0,4$	
	0,50	−	0,05960	0,05379	0,06417	0,07718	$.g l^3$
		+	0,07496	0,07365	0,08491	0,09800	$.p l^3$
$\mathfrak{M}$	0,75	−	0,09378	0,07387	0,07537	0,08420	$.g l^3$
		+	0,12302	0,11843	0,12889	0,14124	$.p l^3$
	1,00	−	0,17652	0,14359	0,13501	0,13766	$.g l^3$
		+	0,21758	0,21147	0,21951	0,23116	$.p l^3$

Für das Weitere muss das Verhältniss zwischen g und p berücksichtigt werden. Wir behandeln zunächst beispielsweise den Fall, wo $g = 0,3q$, $p = 0,7q$ ist; alsdann ergiebt sich nach der vorigen Tabelle:

	$\frac{l_2}{l} =$	$\frac{a}{l} = 0,1$	$\frac{a}{l} = 0,2$	$\frac{a}{l} = 0,3$	$\frac{a}{l} = 0,4$	
	0,50	0,07035	0,06769	0,07869	0,09175	
$\mathfrak{M}$	0,75	0,11425	0,10506	0,11248	0,12413	$.q l^3$
	1,00	0,20526	0,19111	0,19416	0,20311	

Bestimmt man nun für jeden der drei Werthe von $\frac{l_2}{l}$ dasjenige $\frac{a}{l}$, für welche M zum Minimum wird und das Minimum von M selbst (nach der im Anhange gegebenen Regel), so ergiebt sich

$$l_2 = 0,50l,\quad l = 1,5\lambda;\quad a = 0,169l,\quad \mathfrak{M} = 0,0670ql^2 = 0,2263q\lambda^3,$$
$$l_2 = 0,75l,\quad l = 1,2\lambda;\quad a = 0,206l,\quad \mathfrak{M} = 0,1050ql^3 = 0,1815q\lambda^3,$$
$$l_2 = 1,00l,\quad l = 1,0\lambda;\quad a = 0,232l,\quad \mathfrak{M} = 0,1902ql^2 = 0,1902q\lambda^3.$$

Bestimmt man nun in gleicher Weise denjenigen Werth von $\frac{l_2}{l}$, für welchen M bei gleichem λ zum absoluten Minimum wird, so ergiebt sich

$$l_2 = 0,834\,l,\qquad a = 0,214\,l,\qquad \mathfrak{M} = 0,1785\,q\lambda^2.$$

In gleicher Weise ergiebt sich für die beiden Grenzfälle, wo entweder die zufällige Last oder das Eigengewicht gegen die Gesammtlast klein ist, so dass $p = o$ oder $g = o$ gesetzt werden kann:

$$p = 0:\ l_2 = 0,837l,\ a = 0,307l,$$
$$\mathfrak{M} = 0,1203p\lambda^3,\ \mathfrak{Q} = 0,8102q\lambda^2.$$
$$g = 0:\ l_2 = 0,837l,\ a = 0,186l,$$
$$\mathfrak{M} = 0,2013q\lambda^3,\ \mathfrak{Q} = 1,0749q\lambda^2.$$

Für andere Verhältnisse von p zu q wird man hiernach annähernd $\frac{l_2}{l} = 0,837$, $\frac{a}{l} = 0,307\frac{g}{q} + 0,186\frac{p}{q}$ setzen können.

Für drei einfache Träger mit der Spannweite λ wird $\mathfrak{M} = 3 . \frac{1}{12} q \lambda^3 = 0{,}25 q \lambda^3$ und für $p = 0 : \mathfrak{Q} = 3 . \frac{1}{4} q \lambda^2 = 0{,}75 q \lambda^2$, für $g = 0$: $\mathfrak{Q} = 3 . \frac{7}{24} q \lambda^2 = 0{,}875 q \lambda^2$, so dass sich beim continuirlichen Gelenkträger $\mathfrak{M}$ *19 bis 52 Procent* kleiner, $\mathfrak{Q}$ allerdings *8 bis 23 Procent* grösser ergiebt.

In gleicher Weise lässt sich der Fall behandeln, wo das Mittelfeld kein Gelenk, jedes der äusseren Felder ein Gelenk hat (Fig. 52). Es ergiebt sich für die zweckmässigste Anordnung, wenn l_1 die Länge der äusseren, l_3 die Länge der inneren Felder bezeichnet,

$$p = 0: \; l_1 = 0{,}788\, l_3, \quad a = 0{,}290\, l_1 = 0{,}225\, l,$$
$$\mathfrak{M} = 0{,}1256 p \lambda^3, \; \mathfrak{Q} = 0{,}7945 p \lambda^2;$$
$$g = 0: \; l_1 = 1{,}042\, l_3, \quad a = 0{,}138\, l_1 = 0{,}120\, l,$$
$$\mathfrak{M} = 0{,}2033 p \lambda^3, \; \mathfrak{Q} = 0{,}9423 p \lambda^2.$$

Für andere Verhältnisse von p zu g würde man hiernach annähernd $\frac{l_1}{l_3} = 0{,}788 \frac{g}{q} + 1{,}042 \frac{p}{q}$, $\frac{a}{l_1} = 0{,}287 \frac{g}{q} + 0{,}145 \frac{p}{q}$ setzen können.

Hier ergiebt sich gegen einfache Träger $\mathfrak{M}$ um *19 bis 50 Procent* kleiner, $\mathfrak{Q}$ um *3 bis 8 Procent* grösser, so dass zwischen beiden Anordnungen in Hinsicht des Materialbedarfes kein wesentlicher Unterschied herrscht.

Die Tabellen zeigen, dass man von den zweckmässigsten Verhältnissen bedeutend abweichen kann, ohne dass sich $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Q}$ stark verändern, so dass es nicht nöthig erscheint, diese Verhältnisse genau einzuhalten, wenn damit etwa andere praktische Vortheile gewonnen werden.

B. Continuirliche Träger.

§. 35. **Einleitung.** Die continuirlichen Träger oder die Träger, welche auf mehr als zwei Stützen liegen, lassen sich nicht mehr nach den Regeln der reinen Statik behandeln; vielmehr sind zur Ermittlung der Druckvertheilung über die Stützen auch noch die Gesetze der Elasticitätslehre in Anwendung zu bringen, wodurch die Behandlung eine schwierigere wird. Die Aufgabe wird noch dadurch besonders erschwert, dass bei der Bestimmung die Druckvertheilung das Gesetz, wornach sich der Querschnitt verändert, mit in Frage kommt, während man andererseits durch diese Untersuchung das Gesetz der Querschnittsveränderung erst kennen lernen will. Für einzelne Fälle ist es wohl geglückt, die Aufgabe auch in dieser Richtung streng durchzuführen. Im Allgemeinen aber bleibt wohl nichts übrig, zunächst den Querschnitt als constant anzunehmen. Hat man auf Grundlage der sich hieraus ergebenden Druckvertheilung

die Veränderlichkeit des Querschnittes ermittelt, so ist es möglich, noch einmal eine genauere Bestimmung der Druckvertheilung vorzunehmen. Wir werden indess später zeigen, wie man von vorneherein den Einfluss der Veränderlichkeit des Querschnittes wenigstens schätzungsweise berücksichtigen kann. Zur Erleichterung des Studiums erscheint es uns indess angemessen, die Untersuchung zunächst unter der Annahme eines constanten Querschnittes vorzunehmen.

Abweichend von der bei den einfachen Trägern befolgten Methode erscheint es uns endlich angemessen, die analytische und graphische Behandlung zu trennen.

I. Analytische Behandlung unter Annahme eines constanten Querschnittes.

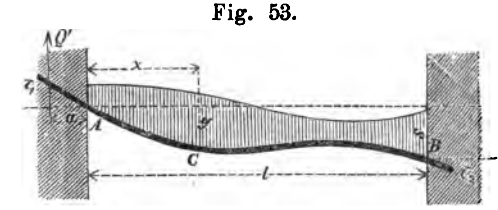
VI. Kapitel.

Allgemeines.

§. 36. Schief eingespannter Träger mit beliebiger Belastung.

Die Enden eines beliebig belasteten Stabes (Fig. 53) mögen so eingespannt sein, dass die Enden mit der Horizontalen Winkel bilden, deren Tangenten τ_1, τ_2 sind, und das rechte Ende B um P unter der durch das Ende A gehenden Horizontalen liegt. Der Abstand eines Punktes der Axe in der Entfernung $AC = x$ von der durch A gehenden Horizontalen sei y, das Moment an dieser Stelle M, das constante Trägheitsmoment W, der Elasticitätscoefficient E und die Länge $AB = l$. Alsdann ist bekanntlich

Fig. 53.



$$1. \quad EW\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Die einmalige Integration giebt $EW\frac{dy}{dx} = \int M dx + C$; wendet man diese Gleichung für $x = o$ und $x = l$ an, für welche Punkte $\frac{dy}{dx}$ in τ_1 und τ_2 übergehen muss, und subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$2. \quad EW(\tau_2 - \tau_1) = \int_o^l M dx.$$

Ferner ist nun $EWy = \int\int M dx^2$. Diese Gleichung lässt sich indess nach der Regel der partiellen Integration auf folgende Form bringen:

$$3. \quad EWy = EWx\frac{dy}{dx} - \int Mx dx.$$

(Siehe des Verfassers „Lehre von der Elasticität und Festigkeit“, Seite 64, Formel 43 und 44). Wendet man diese Gleichung für $x = o$ und $x = l$ an und subtrahirt die so entstandenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$4. \quad EW(l\tau_2 - s) = \int_o^l Mx dx.$$

Die Gleichungen 2. und 4. lassen sich nun leicht zur Bestimmung der unbekannten äusseren Kräfte anwenden. Wir bezeichnen die Momente für die Enden des Stabes mit M', M'', die Resultante aller auf das linke eingespannte Ende geäusserten Reactionen mit Q', den Abstand derselben von A mit a das Moment der zwischen A und C liegenden Last in Beziehung auf C mit X_0 und das Moment der ganzen zwischen A und B liegenden Last in Beziehung auf B mit X''. Alsdann ist $M = -Q'(a + x) + X_0$, oder, weil $-Q'a = M'$ ist,

$$5. \quad M = M' - Q'x + X_0.$$

Dies für den Punkt B angewendet, giebt $M'' = M' - Q'l + X''$ oder

$$Q' = \frac{M' - M''}{l} + \frac{X''}{l}.$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in

$$M = \frac{M'(l - x) + M''x}{l} + X_0 - X''\frac{x}{l}.$$

Es ergiebt sich leicht, dass $X_0 - X''\frac{x}{l}$ das Moment ist, welches in C entstehen würde, wenn der Stab mit den Enden frei auf Stützen läge. Bezeichnen wir dieses Moment mit X, so wird

$$6. \quad M = \frac{M'(l - x) + M''x}{l} + X.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichungen 2. und 4. ein und führt die Integration so weit als möglich aus, so ergiebt sich

$$2EW(\tau_2 - \tau_1) = (M' + M'')\,l + 2\int_o^l X dx,$$

$$6EW(l\tau_2 - s) = (M' + 2M'')\,l^2 + 6\int_o^l Xx dx.$$

Die Auflösung in Beziehung auf M' und M'' giebt

$$7.\quad \begin{cases} M' l^2 = 2 \int_o^l X(3x - 2l)\, dx - 2EW(2l\tau_1 + l\tau_2 - 3s), \\ M'' l^2 = 2 \int_o^l X(l - 3x)\, dx + 2EW(l\tau_1 + 2l\tau_2 - 3s). \end{cases}$$

Bezeichnet man diejenigen Momente an den Enden des Stabes, welche für eine horizontale Einspannung desselben entstehen, mit $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, so folgt aus den eben aufgestellten Formeln

$$8.\quad \begin{cases} \mathfrak{M}' l^2 = 2 \int_o X(3x - 2l)\, dx = 2 \int_o^l X_0 (3x - 2l)\, dx, \\ \mathfrak{M}'' l^2 = 2 \int_o^l X(l - 3x)\, dx = 2 \int_o^l X_0 (l - 3x)\, dx + X'' l^2. \end{cases}$$

Die allgemeinen Gleichungen für M' und M'' gehen hierdurch über in

$$9.\quad \begin{cases} M' = \mathfrak{M}' - 2EW \frac{l(2\tau_1 + \tau_2) - 3s}{l^2}, \\ M'' = \mathfrak{M}'' + 2EW \frac{l(\tau_1 + 2\tau_2) - 3s}{l^2}. \end{cases}$$

Die Reduction dieser Gleichungen auf τ_1 und τ_2 giebt

$$10.\quad \begin{cases} \tau_1 = -\frac{l}{6EW}(2M' + M'' - \mathfrak{N}') + \frac{s}{l}, \\ \tau_2 = +\frac{l}{6EW}(M' + 2M'' - \mathfrak{N}'') + \frac{s}{l}, \end{cases}$$

wenn wir zur Abkürzung

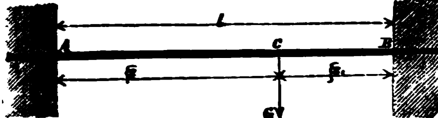
$$11.\quad \mathfrak{N}' = 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'', \qquad \mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}' + 2\mathfrak{M}''$$

setzen. Es erübrigt jetzt zu einer vollständigen Grundlage für die Theorie der continuirlichen Träger nur noch, die Grössen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ für verschiedene Belastungsfälle zu bestimmen.

§. 37. Horizontal eingespannter Träger.

a) **Belastung durch eine isolirte Last** G (Fig. 54). Der Abstand der Last von den beiden Stützen sei ξ, ξ_1. Das Integral in 8. ist in zwei Theile zwischen o und ξ, und ξ und l zu zerlegen. Für den ersten Theil wird $X_0 = o$, für den zweiten $X_0 = Gx'$, wenn wir $x = \xi + x'$ setzen, daher

Fig. 54.



$$\mathfrak{M}' l^2 = 2G \int_0^{\xi_1} x' (3x' + 3\xi - 2l)\, dx'$$

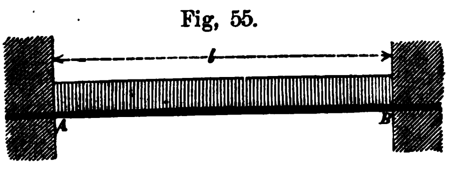
$$= G\xi_1^2 (2\xi_1 + 3\xi - 2l) = G\xi\xi_1^2.$$

Durch Vertauschung von ξ mit ξ_1 ergiebt sich $\mathfrak{M}'' l^2 = G\xi^2 \xi_1$, mithin einfach

$$12. \quad \mathfrak{M}' = \frac{G\xi\xi_1^2}{l^2}, \quad \mathfrak{M}'' = \frac{G\xi^2\xi_1}{l^2}.$$

$$13. \quad \begin{cases} \mathfrak{N}' = G\dfrac{\xi\xi_1(2-\xi)}{l^2} = G\dfrac{\xi_1(l^2-\xi_1^2)}{l^2}, \\ \mathfrak{N}'' = G\dfrac{\xi\xi_1(l+\xi)}{l^2} = G\dfrac{\xi(l^2-\xi^2)}{l^2}. \end{cases}$$

b) **Totale gleichmässige Belastung** (Fig. 55). Bezeichnet man die Last pro Längeneinheit mit q, so ist in 8. $X_0 = qx \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} qx^2$ zu setzen, daher



Fig, 55.

$$\mathfrak{M}' l^2 = \mathfrak{M}'' l^2 = q \int_0^l x^2 (3x - 2l)\, dx,$$

d. i. nach Ausführung der Integration

$$14. \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{1}{12} ql^2,$$

$$15. \quad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = \frac{1}{4} ql^2.$$

c) **Partielle gleichmässige Belastung.** Ist der Stab nur partiell über den linken Theil $AC = \xi$ (Fig. 56) mit p pro Längeneinheit belastet, so ergiebt sich nach Formel 12:

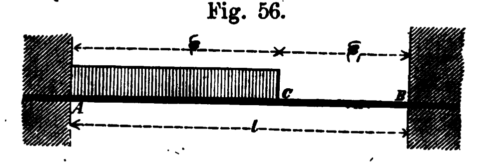


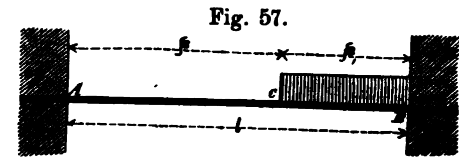
Fig. 56.

$$\mathfrak{M}' = \int_0^{\xi} \frac{px(l-x)^2\, dx}{l^2},$$

$$\mathfrak{M}'' = \int_0^{\xi} \frac{px^2(l-x)\, dx}{l^2}, \text{ d. i.}$$

$$16. \quad \mathfrak{M}' = p\frac{\xi^2(l^2 + 2l\xi_1 + 3\xi_1^2)}{12l^2}, \quad \mathfrak{M}'' = p\frac{\xi^3(l + 3\xi_1)}{12l^2};$$

$$17. \quad \mathfrak{N}' = p\frac{(l^2-\xi_1^2)^2}{4l^2} = p\frac{\xi^2(2l-\xi)^2}{4l^2}, \quad \mathfrak{N}'' = p\frac{\xi^2(2l^2-\xi^2)}{4l^2}.$$


Fig. 57.

Wenn dagegen der rechte Theil BC belastet ist (Fig. 57), so ergiebt sich entweder durch Vertauschung von M' mit M'' und ξ mit ξ_1 in den vorigen Formeln oder direct aus Formel 12:

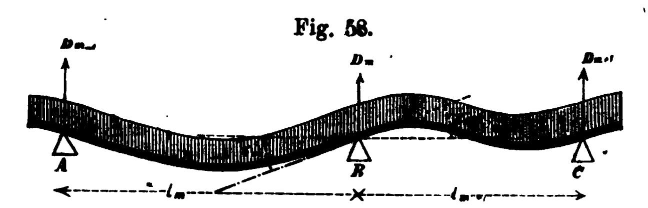
$$18.\quad \mathfrak{M}' = p\,\frac{\xi_1^3(l+3\xi)}{12l^2},\quad \mathfrak{M}'' = p\,\frac{\xi_1^2(l^2+2l\xi+3\xi^2)}{12l^2};$$

$$19.\quad \mathfrak{N}' = p\,\frac{\xi_1^2(2l^2-\xi_1^2)}{4l^2},\quad \mathfrak{N}'' = p\,\frac{(l^2-\xi_1^2)}{4l^2} = p\,\frac{\xi_1^2(2l-\xi_1)^2}{4l^2}.$$

Hiernach ist für $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ zur Erleichterung der Rechnung folgende Tabelle berechnet:

x	*Links belastet* (Fig. 56)		*Rechts belastet* (Fig. 57)	
	$\mathfrak{N}'$	$\mathfrak{N}''$	$\mathfrak{N}'$	$\mathfrak{N}''$
0	0	0	0,25000	0,25000
0,1	0,00903	0,00497	0,24097	0,24503
0,2	0,03240	0,01960	0,21760	0,23040
0,3	0,06503	0,04298	0,18497	0,20703
0,4	0,10240	0,07360	0,14760	0,17640
0,5	0,14063	0,10938	0,10938	0,14063
0,6	0,17640	0,14760	0,07360	0,10240
0,7	0,20703	0,18497	0,04298	0,06503
0,8	0,23040	0,21760	0,01960	0,03240
0,9	0,24503	0,24097	0,00497	0,00903
1	0,25000	0,25000	0	0
$\cdot\, l$	$\cdot\, pl^2$	$\cdot\, pl^2$	$\cdot\, pl^2$	$\cdot\, pl^2$

§. 38. **Normalmomente der continuirlichen Träger.** Die einzelnen Abtheilungen, in welche der continuirliche Träger durch die Stützen getheilt wird, nennen wir Felder. Jedes einzelne Feld befindet sich in demselben Zustande, wie ein an den Enden schief eingespannter Träger, so dass die Untersuchungen der vorigen §§. hier zur Anwendung kommen können.


Fig. 58.

Die Untersuchung lässt sich am leichtesten in der Weise führen, dass wir zunächst die Momente für

die über den Stützen liegenden Querschnitte bestimmen. Wir nennen dieselben die Normalmomente. Hieraus ergiebt sich dann leicht alles Uebrige, nämlich die Stützendrücke, Transversalkräfte und Momente für die übrigen Querschnitte und die Formänderung. Wir führen hierbei die folgenden Bezeichnungen ein:

n die Anzahl aller Felder, also $n+1$ die Anzahl der Stützen,
$0, 1, 2, 3, \ldots n$ die Indices der Stützen,
$l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ die Längen der Felder,
$D_0, D_1, D_2, \ldots D_n$ die Stützendrücke,
$M_0, M_1, M_2, \ldots M_n$ die Normalmomente, wobei aber $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ ist,
$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ die Tangenten der Winkel, welche die deformirte Axe über den Stützen mit der Horizontalen bildet.

Wir setzen zunächst voraus, dass sämmtliche Stützen in einer Horizontalen liegen.

Nach den Gleichungen 10 ergiebt sich für den Winkel τ_m an der m^{ten} Stütze, indem man einmal diesen Winkel als τ_2 für das m^{te} Feld, sodann als τ_1 für das $(m+1)^{ste}$ Feld betrachtet (Fig. 58):

$$\begin{cases} 6EW\tau_m = +\, l_m\,(M_{m-1} + 2M_m - \mathfrak{N}_m''), \\ 6EW\tau_m = -\, l_{m+1}\,(2M_m + M_{m+1} - \mathfrak{N}'_{m+1}). \end{cases}$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{N}_m'$, $\mathfrak{N}_m''$ die nach Formel 11 von $\mathfrak{M}_m'$, $\mathfrak{M}_m''$, d. i. den Momenten, welche an den Enden des m^{ten} Feldes entstehen würden, wenn die Enden desselben horizontal eingespannt wären, abhängigen Grössen. Diese lassen sich also unabhängig von den übrigen Feldern nach den in den vorigen §§. entwickelten Regeln bestimmen. Die Elimination von τ_m aus beiden Gleichungen giebt:

$$20.\quad M_{m-1}\,l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}\,l_{m+1} = \mathfrak{N}_m''\,l_m + \mathfrak{N}_{m+1}'\,l_{m+1}.$$

Wenden wir diese Gleichung für sämmtliche Verbindungen von drei auf einander folgenden Stützen an, so ergeben sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass für die äussersten Stützen die Momente Null sind, folgende Gleichungen:

$$21.\quad \begin{cases} 2M_1(l_1+l_2) + M_2 l_2 = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l_2, \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2+l_3) + M_3 l_3 = \mathfrak{N}_2'' l_2 + \mathfrak{N}_3' l_3, \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3+l_4) + M_4 l_4 = \mathfrak{N}_3'' l_3 + \mathfrak{N}_4' l_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{n-3} l_{n-2} + 2M_{n-2}(l_{n-2}+l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} = \mathfrak{N}''_{n-2} l_{n-2} + \mathfrak{N}'_{n-1} l_{n-1}, \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1}+l_n) = \mathfrak{N}''_{n-1} l_{n-1} + \mathfrak{N}'_n l_n. \end{cases}$$

Wir wollen diese $n-1$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der $n-1$-Normalmomente ausreichen, die Normalgleichungen nennen.

Auf die Auflösung der Normalgleichungen im Allgemeinen wollen wir nicht eingehen (siehe des Verfassers „Lehre von der Elasticität und

Festigkeit, S. 114", und „Cullmann's graphische Statik, S. 296"). Wenn es sich um 2, 3, 4 oder 5 Felder handelt, so können die Gleichungen leicht in der bekannten Weise der Auflösung der Gleichungen I. Grades mit mehreren Unbekannten aufgelöst werden.

Im Folgenden werden wir meist voraussetzen, dass die Längen der beiden äusseren Felder gleich, nämlich $= l_1$, und die Längen sämmtlicher inneren Felder ebenfalls gleich, nämlich $= l$ seien.

§. **39. Bestimmung der übrigen Grössen.** Die beiden Transversalkräfte für die Enden eines Feldes bezeichnen wir mit Q', Q'', die Momente für dieselben Stellen mit M', M'', die gesammte in diesem Felde liegende Last mit G und den Abstand ihres Schwerpunktes von der linken und rechten Stütze mit ξ, ξ_1.

Ist noch a der Abstand der Transversalkraft Q' von der linken Stütze, so ist $M'' = - Q'(a + l) + G\xi_1 = M' - Q'l + G\xi_1$, und $Q'' = Q' - G$, daher

$$22. \quad \begin{cases} Q' = \dfrac{M' - M''}{l} \quad G\dfrac{\xi_1}{l}. \\ Q'' = Q' - G = \dfrac{M' - M''}{l} + G\dfrac{\xi}{l}. \end{cases}$$

Ist nun ferner G_x die Last, welche zwischen der linken Stütze und dem fraglichen Querschnitte liegt und ξ_x der Abstand ihres Schwerpunktes vom Querschnitte, so ist für den fraglichen Querschnitt offenbar $Q = Q' - G_x$, $M = - Q'(a + x) + G\xi_x$, oder, da $-Q\,a = M'$ ist,

$$23. \quad Q = Q' - G_x,$$

$$24. \quad M = M' - Q'x + G_x\xi_x.$$

Der auf die m^{te} Stütze geübte Druck sei D_m, die links und rechts von dieser Stütze wirkende Transversalkraft Q''_m, Q'_{m+1}; alsdann ist $Q'_{m+1} = Q''_m + D_m$, also

$$25. \quad D_m = - Q''_m + Q'_{m+1}.$$

Für die äussersten Stützen wird $D_0 = + Q'_1$, $D_n = - Q''_n$.

VII. Kapitel.

Einfluss des Eigengewichtes.

§. **40. Normalmomente.** Bezeichnen wir die Last pro Längeneinheit mit g, so ist nach Gleichung 15 $\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4} g l^2$, $\mathfrak{N}_2' = \frac{1}{4} g l^2$ u. s. w. Daher werden die Normalgleichungen nach 21:

$$26. \begin{cases} 2M_1(l_1+l_2)+M_2l_2 = \frac{1}{4}g(l_1^3+l_2^3), \\ M_1l_2+2M_2(l_2+l_3)+M_3l_3 = \frac{1}{4}g(l_2^3+l_3^3), \\ M_2l_3+2M_3(l_3+l_4)+M_4l_4 = \frac{1}{4}g(l_3^3+l_4^3), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Sind die Felder, wie wir dies immer voraussetzen, symmetrisch angeordnet, so reduciren sich diese Gleichungen, da je zwei Normalmomente gleich sind, auf die Hälfte. In Betreff der Gesetze, welchen in diesem Falle die Normalmomente folgen (siehe des Verfassers „Lehre von der Elasticität und Festigkeit", Seite 130).

§. **41. Transversalkräfte.** Sind M', M'' die Normalmomente für die Enden eines beliebigen Feldes mit der Länge l (vergl. §. 39), so ist $M'' = M' - Q'l + gl\,\frac{1}{2}l$, $Q'' = Q' - gl$, mithin

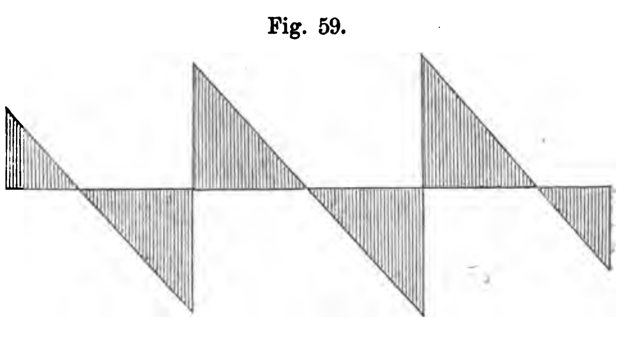
$$27. \quad Q' = +\frac{1}{2}gl + \frac{M' - M''}{l}, \quad Q'' = -\frac{1}{2}gl + \frac{M' - M''}{l}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt wird

$$28. \quad Q = Q' - gx.$$

Die Transversalkräfte in den einzelnen Feldern lassen sich hiernach durch Gerade darstellen, welche einander parallel sind (Fig. 59).

Fig. 59.



Die Stützendrücke sind nunmehr durch die Gleichung 25 bestimmt.

§. **42. Momente.** Das Moment M für einen beliebigen Querschnitt ist $M = -Q'(a+x) + gx\,.\,\frac{1}{2}x$, oder

$$29. \quad M = M' - Q'x + \frac{1}{2}gx^2.$$

Setzt man nach 27 $Q' = \frac{1}{2}gl + \frac{M' - M''}{l}$, so wird

$$30. \quad M = -\frac{1}{2}gx(l-x) + M'\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M''\frac{x}{l}.$$

Hiernach lassen sich die Momente in den einzelnen Feldern durch Parabeln mit verticaler Axe darstellen, welche sämmtlich denselben Parameter haben (Fig. 60).

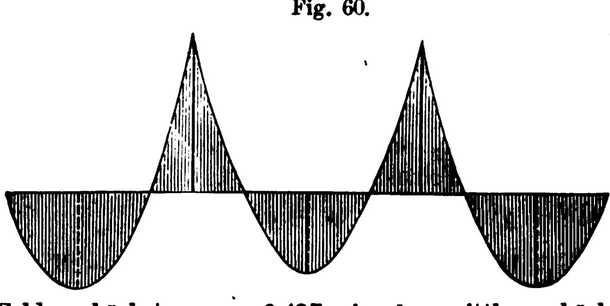
M wird zum Maximum für $\frac{dM}{dx} = 0$, d. i. für $-Q' + gx = 0$, oder für

$$31. \quad x = \frac{Q'}{g} = \frac{1}{2} l + \frac{M' - M''}{g l},$$

und zwar wird $max\, M = M' - Q' \frac{Q'}{g} + \frac{1}{2} g \left(\frac{Q'}{g}\right)^2$, d. i.

$$32. \quad max\, M = M' - \frac{Q'^2}{2g} = \frac{1}{8} g l^2 + \frac{1}{2}(M' + M'') - \frac{(M' - M'')^2}{2 g l^2}.$$

Fig. 60.



Das zweite Glied in dem Ausdrucke für x ist gegen das erste nur klein, so dass M nahezu für $x = \frac{1}{2} l$ zum Maximum wird. In praktischen Fällen wird x in den äusseren Feldern höchstens um $0{,}127$, in den mittleren höchstens um $0{,}04 l$ von $\frac{1}{2} l$ abweichen.

§. **43. Beispiel.** Wir wollen zur näheren Erläuterung ein Beispiel durchführen, wobei wir drei Felder voraussetzen, deren Längen sich wie $5 : 6 : 5$ verhalten, so dass $l = 1{,}2 l_1$ ist. Ist λ die mittlere Länge, also $3\lambda = 2 l_1 + l$, so wird $3\lambda = \frac{5}{3} l + l = \frac{8}{3} l$, also $\lambda = \frac{8}{9} l = \frac{16}{15} l_1$, oder

$$l_1 = \frac{15}{16} \lambda = 0{,}9375 \lambda, \quad l_1^2 = 0{,}8789 \lambda^2,$$

$$l = \frac{9}{8} \lambda = 1{,}1250 \lambda, \quad l^2 = 1{,}2656 \lambda^2.$$

Die einzige Normalgleichung wird $2 M_1 (l_1 + l) + M_1\, l = \frac{1}{4} g (l_1^3 + l^3)$, also

$$M_1 = M_2 = \frac{g (l_1^3 + l^3)}{4(2 l_1 + 3 l)} = \frac{1 + 1{,}2^3}{4 (2 + 3 . 1{,}2)} g l_1^2$$
$$= 0{,}12178 g l_1^2 = 0{,}08457 g l^2 = 0{,}10703 g \lambda^2.$$

Transversalkräfte. I. Feld. Hier ist in Formel 27 $M' = 0$, $M'' = 0{,}1218 g l_1^2$ zu setzen; daher wird

$$Q' = + \frac{1}{2} q l_1 - 0{,}1218 g l_1 = + 0{,}3782 g l_1 = + 0{,}3546 g \lambda,$$

$$Q'' = - \frac{1}{2} g l_1 - 0{,}1218 g l_1 = + 0{,}6218 g l_1 = - 0{,}5829 g \lambda,$$

$$Q = \left(0{,}3782 - \frac{x}{l_1}\right) g l_1 = \left(0{,}3546 - 0{,}9375 \frac{x}{l_1}\right) g \lambda.$$

Für $x = 0{,}4782 l_1$ wird $Q = 0$.

II. Feld. Hier ist $M' = M''$, daher nach Formel 27 sehr einfach

$$Q' = + \frac{1}{2} g l = + 0{,}5625 g \lambda, \quad Q'' = - \frac{1}{2} g l = - 0{,}5625 g \lambda,$$

$$Q = \frac{1}{2} g (l - 2x) = 0{,}5625 \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) g \lambda.$$

In Fig. 59 ist hiernach Q graphisch dargestellt.

Die Stützendrücke sind nun nach Formel 25:

$$D_0 = D_3 = Q'_1 = 0{,}3782\, g l_1 = 0{,}3546\, g \lambda,$$
$$D_1 = D_2 = 0{,}5625\, g\lambda + 0{,}5625\, g\lambda = 1{,}1454\, g\lambda.$$

Momente. I. Feld. Hier ist in Formel 29 $M' = 0,\ Q_1 = 0{,}3782\, g l_1$ zu setzen; daher wird

$$M = -(0{,}3782\, l_1 - 0{,}5\, x) g x = -\left(0{,}3782 - 0{,}5 \frac{x}{l_1}\right)\frac{x}{l_1} g l_1^2$$
$$= -\left(0{,}3324 - 0{,}4394 \frac{x}{l_1}\right)\frac{x}{l_1} g \lambda^2.$$

Für $\frac{x}{l_1} = \frac{0{,}3782}{0{,}5} = 0{,}7564$ wird $M = 0$. Zum Maximum wird M nach 31 für $x = \frac{0{,}3782\, g l_1}{g} = 0{,}3782\, l_1$ und zwar ist

$$max\, M = 0 - \frac{(0{,}3782\, g l_1)^2}{2g} = -\ 0{,}07152\, g l_1^2 = 0{,}06286\, g \lambda^2.$$

II. Feld. Hier ist $M' = M'' = 0{,}08457\, g l^2$, $Q' = 0{,}5\, g l$ zu setzen. Daher wird nach Formel 29:

$$M = 0{,}08457\, g l^2 - 0{,}5\, g l x + 0{,}5\, g x^2 = \left[0{,}08457 - 0{,}5 \frac{x}{l} + 0{,}5\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] g l^2$$
$$= \left[0{,}1070 - 0{,}6328\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\right] g \lambda^2.$$

M wird Null für

$$x^2 - l x + 0{,}16914\, l^2 = 0$$
$$x = (0{,}5 \mp \sqrt{0{,}08086})\, l = (0{,}5 \mp 0{,}2843)\, l$$
$$= 0{,}2157\, l \text{ und } 0{,}7843\, l.$$

Zum Maximum wird M nach 31 für $x = 0{,}5\, l$, und zwar wird:

$$max\, M = -\ 0{,}04043\, g l^2 = -\ 0{,}05117\, g \lambda^2.$$

In Fig. 60 ist M graphisch dargestellt.

VIII. Kapitel.

Belastung eines einzelnen Feldes.

§. 44. Normalmomente für die nicht belasteten Felder. Für die Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise ist es nöthig, den Einfluss der Belastung eines einzelnen Feldes kennen zu lernen. Es sei das r^{te} Feld beliebig belastet. Alsdann sind die Normalgleichungen

$$33.\quad \begin{cases} 2M_1(l_1+l_2) + M_2 l_2 = 0, \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2+l_3) + M_3 l_3 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ M_{r-2} l_{r-1} + 2M_{r-1}(l_{r-1}+l_r) + M_r l_r = \mathfrak{N}' l_r, \\ M_{r-1} l_r + 2M_r(l_r+l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = \mathfrak{N}'' l_r. \\ \dots\dots\dots \\ M_{n-3} l_{n-2} + 2M_{n-2}(l_{n-2}+l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} = 0, \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1}+l_n) = 0. \end{cases}$$

Hiernach ist zunächst $M_2 = -M_1\left(2 + 2\frac{l_1}{l_2}\right)$; demnach haben M_1 und M_2 entgegengesetzte Vorzeichen und dem absoluten Werthe nach ist $M_2 > 2M_1$. Ferner ist $M_3 = -M_2\left(2+2\frac{l_2}{l_3}\right) - M_1\frac{l_2}{l_3} = -M_2\left[2+\frac{l_2}{l_3}\left(2+\frac{M_1}{M_2}\right)\right]$; $\frac{M_1}{M_2}$ ist negativ, aber $< \frac{1}{2}$, also $2+\frac{M_1}{M_2}$ positiv und $> \frac{3}{2}$; demnach haben auch M_2 und M_3 entgegengesetzte Vorzeichen und dem absoluten Werthe nach ist $M_3 > 2M_2$, oder sogar $M_3 > M_2\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_2}{l_3}\right)$. Die Fortsetzung dieser Schlüsse liefert das Resultat:

Die Normalmomente sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen von den Enden nach dem belasteten Felde hin zu, wobei jedes Normalmoment grösser ist, als das Doppelte des vorhergehenden, oder sogar

$$34.\quad M_{m+1} > M_m\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_m}{l_{m+1}}\right).$$

Wir setzen, von dem linken Ende beginnend:

$$M_2 = -\mu_2 M_1,\quad M_3 = -\mu_3 M_2,\quad M_4 = -\mu_4 M_3, \dots$$

Alsdann ergiebt sich aus den Normalgleichungen

$$35.\quad \mu_2 = \frac{2(l_1+l_2)}{l_2},\quad \mu_3 = \frac{2(l_2+l_3)-\frac{l_2}{\mu_2}}{l_3},\quad \mu_4 = \frac{2(l_3+l_4)-\frac{l_3}{\mu_3}}{l_3},\dots$$

wonach leicht die Verhältnisse $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ successive berechnet werden können. Ebenso setzen wir, von dem rechten Ende beginnend

$$M_{n-2} = -\nu_{n-1} M_{n-1},\quad M_{n-3} = -\nu_{n-2} M_{n-2}, \dots$$

Aus den Normalgleichungen ergiebt sich

$$35a.\quad \nu_{n-1} = \frac{2(l_n+l_{n-1})}{l_{n-1}},\quad \nu_{n-2} = \frac{2(l_{n-1}+l_{n-2}) - \frac{l_{n-1}}{\nu_{n-1}}}{l_{n-2}},$$

wonach ebenfalls die Verhältnisse $\nu_{n-1}, \nu_{n-2}, \dots$ successive zu berechnen sind. Der Index der μ und ν entspricht dem Felde, an dessen Stützen die Momente verglichen werden. Bei symmetrischer Anordnung wird $\mu_2 = \nu_{n-1}$, $\mu_3 = \nu_{n-2}, \dots$ oder allgemein

$$\mu_m = \nu_{n-m+1}.$$

Nach 34 ist stets

$$36. \quad \mu_m > 2 + \frac{3\, l_{m-1}}{2\, l_m},$$

so dass bei gleichen Feldern $\mu_m > 3{,}5$ und unter allen Umständen $\mu_m > 2$ wird. In folgender Tabelle sind die Werthe für μ_m für den Fall, dass die Felder vom zweiten an, alle gleich lang sind, angegeben. Hierbei ist mit l_1 die Länge des ersten, mit l die Länge der übrigen Felder bezeichnet.

$\frac{l_1}{l}$	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,9	4,22222	3,76316	3,73426	3,73221	3,73206
1,0	4,00000	3,75000	3,73333	3,73214	3,73206
1,1	3,81818	3,73810	3,73246	3,73208	3,73205
1,2	3,66667	3,72727	3,73171	3,73203	3,73205
1,3	3,53846	3,71739	8,73099	3,73197	3,73205

Der Grenzwerth von μ für ein wachsendes m ergiebt sich, wenn man $\mu_{m-1} = \mu_m$ setzt, also $\mu_m = \frac{2(l+l) - \frac{l}{\mu_m}}{l} = 4 - \frac{1}{\mu_m}$ $\mu^2_m - 4\mu_m + 1 = 0$, woraus folgt:

$$37. \quad \mu_m = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73205.$$

Ist $\frac{l}{l_1} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}15470$, so werden sämmtliche μ_m gleich gross und zwar $= 2 + \sqrt{3} = 3{,}73205$.

§. 45. Transversalkräfte, Stützendrücke und Momente.

Nach Gleichung 22 wird für das m^{te} unbelastete Feld (wobei $m < r$ ist)

$$38. \quad Q_m = \frac{M_{m-1} - M_m}{l_m}.$$

Da M_{m-1} und M_m entgegengesetzte Vorzeichen haben, so hat Q_m dasselbe Vorzeichen wie M_m, ist also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ. Ebenso ist $Q_{m+1}\, l_{m+1} = + M_m - M_{m+1}$, mithin

$$39. \quad \frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{1 - \frac{M_{m+1}}{M_m}}{\frac{M_{m-1}}{M_m} - 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Nach dem vorigen §. ist $\frac{M_{m+1}}{M_m}$ negativ und > 2, also im vorigen Ausdrucke der Zähler positiv und > 3. Ferner ist $\frac{M_{m-1}}{M_m}$ negativ und

$< \frac{1}{2}$, also der Nenner negativ und $< \frac{3}{2}$. Demnach ist $\frac{Q_{m+1}}{Q_m}$ negativ und $> 2\frac{l_m}{l_{m+1}}$, d. h.

Die Transversalkräfte sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen (wenn nicht $2\,l_m < l_{m+1}$ ist) nach dem belasteten Felde hin zu (Fig. 62, *b*), und zwar ist

$$40. \quad -\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2\,\frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Ferner ist nach Gleichung 25 der Stützendruck an einer beliebigen Stütze $D_m = -Q''_m + Q'_{m+1}$. Q''_m und Q'_{m+1} haben entgegengesetzte Vorzeichen, so dass D_m dasselbe Vorzeichen hat wie Q_{m+1}. D_m ist also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ. Ferner ist $D_{m+1} = -Q''_{m+1} + Q'_{m+2}$, mithin

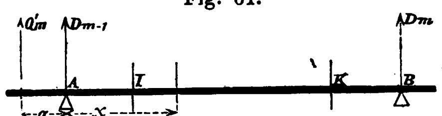
$$\frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{1 - \frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}}}{\frac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1}.$$

Nach dem Vorigen ist $\frac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}}$ negativ und $> 2\,\frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$; ebenso ist $\frac{Q_m}{Q_{m+1}}$ negativ und $< \frac{1}{2}\,\frac{l_{m+1}}{l_m}$. Demnach ist der Zähler positiv und der Nenner negativ, also der Bruch negativ, und zwar

$$41. \quad -\frac{D_{m+1}}{D_m} > \frac{1 + 2\,\frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1 + \frac{1}{2}\,\frac{l_{m+1}}{l_m}}.$$

Hiernach sind die Stützendrücke abwechselnd positiv und negativ und nehmen (wenn nicht $4\,l_m > l_{m+1}$ ist), nach dem belasteten Felde hin zu.

Fig. 61.



Für einen beliebigen Querschnitt im m^{ten} Felde ist nach 24 $M = M_{m-1} + Q'_m x = M_{m-1} - (M_{m-1} - M_m)\,\frac{x}{l}$, oder

$$42. \quad M = M_{m-1}\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_m \frac{x}{l}.$$

Da M_{m-1} und M_m nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so nimmt für dasselbe $\frac{x}{l}$ auch M nach dem belasteten Felde hin zu (Fig. 62*c*).

Nach 42. theilt sich das Feld AB (Fig. 61) in zwei Theile AJ, JB, in denen die Momente entgegengesetzte Vorzeichen haben. Setzen wir $AJ = a$, so wird, wenn wir $M = 0$, $x = a$ setzen,

$$a_r = \frac{M_{r-1}}{M_{r-1} - M_r}\,l_r.$$

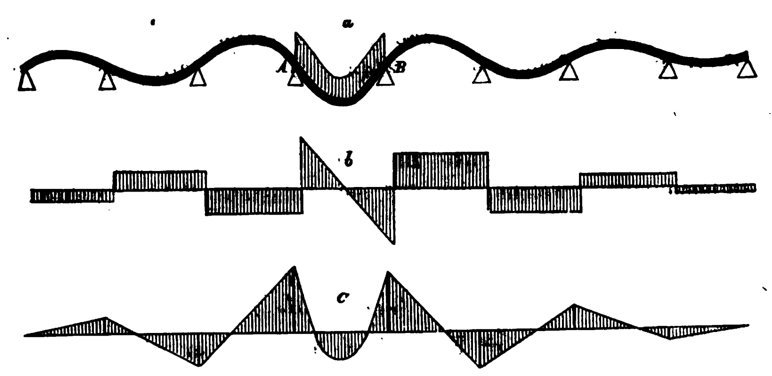
Die Länge a ändert sich hierbei nicht, welches der rechten Felder auch belastet sein möge, da das Verhältniss von M_{r-1} und M_r dasselbe bleibt. Setzen wir $M_r = -\mu_r M_{r-1}$, so wird

$$43. \quad a_r = \frac{l_r}{1+\mu_r}.$$

Ist eines der links vom fraglichen Felde liegenden Felder belastet, so ergiebt sich in gleicher Weise, dass sich das Feld in zwei Theile AK,



Fig. 62.



und KB theilt, in denen das Vorzeichen des Momentes verschieden ist. Setzen wir hierbei $BK = b_r$, $M_{r-1} = -\nu_r M_r$, so wird

$$43a. \quad b_r = \frac{l_r}{1+\nu_r}.$$

Wir nennen die Punkte J, K, welche ihre Lage nicht ändern, welches der bezüglich rechts oder links liegenden Felder auch belastet sein möge, die **Fixpunkte** dieses Feldes. Aus der in §. 44 gezeigten Bestimmung der Verhältnisszahlen μ, ν geht hervor, dass μ_r und ν_r, also auch a_r und b_r nur von den Längen der bezüglich links und rechts vom fraglichen Felde liegenden Felder abhängen.

Jede rechts vom fraglichen Felde liegende Last erzeugt im linken Fixpunkte I kein Moment, verändert also auch das Moment, welches durch die Belastung des fraglichen Feldes oder der links liegenden Felder entsteht, nicht. Ebenso verändert jede links vom fraglichen Felde das Moment im rechten Fixpunkte K nicht. Wir können daher auch sagen:

Das Moment im linken Fixpunkte ist von der Belastung der rechten Felder, das Moment im rechten Fixpunkte dagegen von der Belastung der linken Felder unabhängig.

Wenn die Längen der mittleren Felder und ausserdem der beiden Endfelder gleich gross sind, so ergeben sich nach den in §. 44 aufgestellten Werthen für μ folgende Werthe für $\frac{a}{l}$.

$\frac{a}{l}$	II. Feld	III. Feld	IV. Feld	V. Feld
0,9	0,1915	0,2099	0,2112	0,2113
1,0	0,2000	0,2105	0,2113	0,2113
1,1	0,2075	0,2111	0,2113	0,2113
1,2	0,2143	0,2115	0,2113	0,2113
1,3	0,2203	0,2120	0,2114	0,2113

Hiernach ist z. B. bei 3 Feldern mit dem Verhältniss $5:6:5$ im II. Felde $a = 0{,}2143\,l$, $b = 0{,}2143\,l$; für 4 Felder mit dem Verhältnisse $5:6:6:5$ im II. Felde $a = 0{,}2143\,l$, $b = 0{,}2115\,l$, im III. Felde $a = 0{,}2115\,l$, $b = 0{,}2143\,l$ u. s. w.

§. 46. **Normalmomente für das belastete Feld.** Die beiden Normalgleichungen, welche sich auf das belastete Feld beziehen, sind nach 33 (Seite 62):

$$\begin{cases} M_{r-2}\,l_{r-1} + 2M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) + M_r\,l_r = \mathfrak{N}'\,l_r, \\ M_{r-1}l_r + 2M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} = \mathfrak{N}''\,l_r. \end{cases}$$

Denkt man sich das r^{te} Feld nicht belastet, so wird $M_{r-2}\,l_{r-1} + 2M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) + M_r\,l_r = 0$, oder, weil nach der Bezeichnung des vorigen §. $M_r = -\mu_r\,M_{r-1}$ ist, $M_{r-2}\,l_{r-1} + 2M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) - \mu_r\,M_{r-1}\,l_r = 0$. Diese Gleichung bleibt auch noch erfüllt, wenn das r^{te} Feld belastet ist, weil sich durch die Belastung das Verhältniss von M_{r-2} und M_{r-1} nicht ändert. Ebenso wird $M_{r+1}\,l_{r+1} + 2M_r\,(l_r + l_{r+1}) - \nu_r\,M_r\,l_r = 0$. Hierdurch gehen die vorigen Normalgleichungen über in folgende:

$$44. \quad \begin{cases} \mu M_{r-1} + M_r = \mathfrak{N}', \\ M_{r-1} + \nu M_r = \mathfrak{N}''. \end{cases}$$

wobei μ, ν statt μ_r, ν_r gesetzt ist. Die Auflösung giebt:

$$M_{r-1} = \frac{\nu\,\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{\mu\nu - 1}, \quad M_r = \frac{\mu\,\mathfrak{N}'' - \mathfrak{N}'}{\mu\nu - 1}.$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{N}' = 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}' + 2\mathfrak{M}''$ und nach dem vorigen §. $\mu = \frac{l}{a} - 1$, $\nu = \frac{l}{b} - 1$, und ausserdem zur Abkürzung $l - a - b = c$, so wird

$$45. \quad \begin{cases} M_{r-1} = \dfrac{a}{lc}\,[(2l - 3b)\,\mathfrak{M}' + (l - 3b)\,\mathfrak{M}''], \\ M_r = \dfrac{b}{lc}\,[(l - 3a)\,\mathfrak{M}' + (2l - 3a)\,\mathfrak{M}'']. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ sind für vertical abwärts wirkende Lasten stets positiv. Dies folgt bestimmt aus Gleichung 12; es ist aber auch nicht denkbar,

dass ein an den Enden horizontal eingespannter Stab, wie er auch belastet sein möge, sich an den Enden nach oben krümme. Da $3a$ und $3b$ $< l$ sind, so sind die Coefficienten von $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ positiv; demnach ist M_{r-1} und M_r positiv, d. h.:

Die Normalmomente an den Enden des belasteten Feldes sind stets positiv.

In Verbindung mit dem Vorigen ist es nun leicht, das Vorzeichen irgend eines Normalmomentes zu bestimmen.

Nach Formel 44 wird

$$(\mu + 1)\, M_{r-1} + (\nu + 1)\, M_r = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' = 3\,(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'').$$

Da nun $\mu,\ \nu > 2$, also $\mu + 1,\ \nu + 1 > 3$ ist, so ist $3(M_{r-1} + M_r)$ $< 3(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'')$, oder

$$46.\quad M_{r-1} + M_r < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

IX. Kapitel.

Einfluss der zufälligen Last.

a) Transversalkräfte.

§. 47. **Gefährlichste Belastungsweise.** *a*) Belastung des fraglichen Feldes. Wir denken uns jetzt nur dasjenige Feld belastet, in welchem für irgend einen Querschnitt im Abstande x von der linken Stütze die Transversalkraft Q zu bestimmen ist. Ist das Feld durch eine Einzellast G im Abstande ξ und ξ_1 von der linken und rechten Stütze belastet. so ist nach Formel 22 die Transversalkraft für das linke Ende des Feldes:

$$Q' = \frac{M' - M''}{l} + G\frac{\xi_1}{l}.$$

M' und M'' sind nach §. 45 stets positiv; ist also $M' > M''$, so ist Q' positiv. Ist dagegen $M' < M''$, so ist $M'' - M' < M'' + M'$, oder, weil nach §. 46 $M' + M'' < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ ist, $M'' - M' < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, d. i. nach Formel 12 (Seite 55): $M'' - M' < \frac{G\xi\xi_1}{l}$. Da aber $\xi < l$ ist, so ist auch $M'' - M' < G\xi_1$ und mithin Q' positiv. Q' ist also stets positiv, wo auch die Last liegen möge. Ebenso lässt sich nachweisen, dass die Transversalkraft Q'' für das rechte Ende stets negativ ist.

Liegt nun die Last rechts vom Querschnitte, so ist für denselben $Q = Q'$, also Q positiv. Liegt dagegen die Last links vom Querschnitte, so ist $Q = Q' - G = Q''$, also Q negativ. Q ist also positiv oder negativ, je nachdem die Einzellast rechts oder links vom fraglichen Quer-

schnitte liegt. Hieraus folgt nun unmittelbar für eine gleichförmige Belastung:

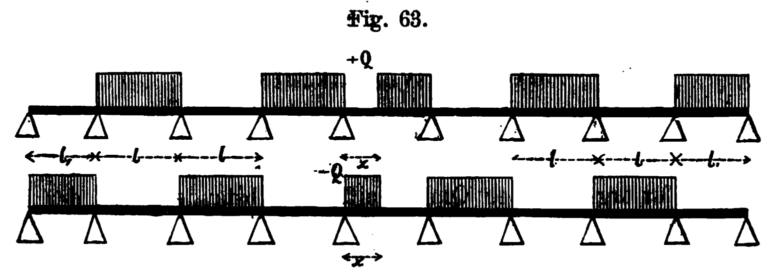
Die Transversalkraft wird für irgend einen Querschnitt zum positiven oder negativen Maximum, wenn sich die Last vom Querschnitte aus bis zum rechten oder linken Ende des Feldes erstreckt.

Ganz dasselbe Gesetz gilt bekanntlich auch für einfache Träger.

b) Belastung der übrigen Felder. Wenn wir uns jetzt das fragliche Feld als nicht belastet denken, so ist für jeden Querschnitt $Q = Q'$. Nach §. 45 wird aber Q' positiv, wenn das links neben dem fraglichen Felde liegende Feld belastet, das rechts neben demselben liegende nicht belastet, und wenn ausserdem alle übrigen Felder abwechselnd belastet sind; negativ dagegen wird Q', wenn die übrigen Felder belastet sind. Hieraus folgt:

Die Transversalkraft wird zum Maximum, wenn die Felder abwechselnd belastet sind, und zwar zum positiven, wenn das rechte Feld nicht belastet, das linke belastet, zum negativen dagegen, wenn das rechte Feld belastet, das linke nicht belastet ist.

Fig. 63.



In Figur 63 ist diese gefährlichste Belastungsweise dargestellt.

Es lässt sich gegen diesen Satz allerdings einwenden, dass eine derartige Belastung in Wirklichkeit eigentlich nie vorkommen wird, namentlich dass eine Trennung der zufälligen Last in sehr viele Theile nie eintreten wird. In der Verordnung des k. k. Handelsministeriums vom 30. August 1870, betreffend die bei der Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beobachtenden Sicherheitsrücksichten, heisst es in der That in Nr. 2: „Bei continuirlichen Trägern muss darauf Rücksicht genommen werden, dass die gleich vertheilte Probelast in zwei (aber nicht mehrere) Stücke getrennt sein kann, so zwar, dass z. B. das zweite und vierte Brückenfeld belastet sind, während die drei andern dazwischen liegenden Felder unbelastet bleiben.“ Dagegen lässt sich aber wiederum einwenden, 1. dass nach obigem Gesetze bei Trägern mit zwei und drei Feldern die Last ohnehin nur in zwei Theile getrennt erscheint, wie Fig. 71 bis 74 zeigt (nur bei vier Feldern tritt zum Theil eine Trennung in drei Theile ein, und 2. dass sich bei Trägern mit vier und mehreren Feldern die

Transversalkräfte nur wenig kleiner ergeben, wenn man eine Trennung der Last in nur zwei Theile annimmt. Der Unterschied beträgt in Betreff der grössten und kleinsten in Betracht kommenden Transversalkräfte höchstens in den äussern Feldern bezüglich *3* und *1 Procent*, in den übrigen Feldern bezüglich *11* und *4 Procent*.

Nimmt man eine Trennung der Last in nur zwei Theile an, so würden nur die beiden dem betreffenden Querschnitte zunächst liegenden Theile beizubehalten sein und die Regel hiesse alsdann: Die Transversalkraft wird zum positiven Maximum, wenn der rechts vom fraglichen Querschnitte liegende Theil des fraglichen Feldes und das links neben diesem liegende Feld ganz belastet, zum negativen Maximum, wenn der links vom fraglichen Querschnitt liegende Theil des fraglichen Feldes und das rechts neben diesem liegende Feld ganz belastet sind.

§. 47. **Bestimmung der grössten Transversalkräfte.** Für das positive Maximum giebt Formel 22 und 23 (Seite 58), da bei der Last p pro Längeneinheit $G = p(l - x)$, $\xi_1 = \frac{1}{2}(l - x)$, $G_x = 0$ zu setzen ist,

$$47. \quad max\,(+\,Q) = \frac{M' - M''}{l} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 pl.$$

Die Normalmomente M' und M'' sind für die soeben bestimmte Belastungsweise nach §. 37 und 38 zu berechnen. Am besten ist es, den Ausdruck für $M' - M''$ direct aufzustellen.

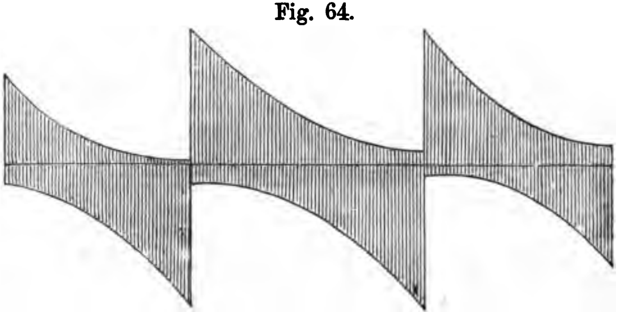
Bezeichnet Q_t die Transversalkraft für eine totale Belastung, welche nach den für den „Einfluss des Eigengewichtes“ aufgestellten Regeln zu berechnen ist, so ist $max\,(+\,Q) + max\,(-\,Q) = Q_t$, weil sich ja die Belastungen für das positive und negative Maximum zur totalen Belastung ergänzen. Daher wird

$$48. \quad max\,(-\,Q) = \frac{M' - M''}{l} - \frac{p x^2}{2l}, \text{ oder}$$

$$49. \quad max\,(-\,Q) = Q_t - max\,(+\,Q).$$

Das Glied $\frac{M' - M''}{l}$ ist mit x variabel; jedoch ist es gegen das zweite Glied überhaupt nur klein, so dass sich die grössten Transversalkräfte in den einzelnen Feldern durch Curven darstellen lassen, welche wenig von Parabeln abweichen, deren verticale Axen durch die Stützen gehen (Fig. 64).

Fig. 64.



§. 49. Absolute Maxima der Transversalkräfte. Für irgend einen Querschnitt ist $max\,(+Q) = Q'$, wobei der Zug vom Querschnitte bis zur rechten Stütze reicht. Je kleiner x ist, oder eine je grössere Länge des fraglichen Feldes belastet ist, desto grösser ist Q', weil nach dem vorigen §. jede neu hinzukommende Last ein positives Q', also eine Vergrösserung von Q' erzeugt. Das absolute positive Maximum erreicht also Q an der linken Stütze des fraglichen Feldes, wenn das ganze Feld belastet ist. Ebenso wird Q zum negativen Maximum an der rechten Stütze, wenn das ganze Feld belastet ist. Nach dem Vorigen sind die übrigen Felder abwechselnd belastet, und zwar ist das neben der betreffenden Stütze liegende Feld mitbelastet. Wir können sonach die Regel aufstellen:

Die Transversalkraft wird zum absoluten Maximum an den Stützen bei abwechselnder Belastung der Felder, wenn die auf beiden Seiten der fraglichen Stütze liegenden Felder mitbelastet sind.

Für diese Belastung wird

$$50.\quad max\,(+Q) = \frac{M' - M''}{l} + \frac{pl}{2},\quad max\,(-Q) = \frac{M' - M''}{l} - \frac{pl}{2}.$$

Da der Stützendruck die Differenz der auf beiden Seiten der Stütze wirkenden Transversalkräfte oder gleich der Summe der absoluten Werthe desselben ist, und beide Transversalkräfte für dieselbe Belastungsweise zum Maximum werden, so *wird der Stützendruck für dieselbe Belastungsweise zum Maximum.*

b) Momente.

§. 50. Gefährlichste Belastungsweise. *a) Belastung des fraglichen Feldes.* Das fragliche Feld sei zunächst durch eine Einzellast G belastet. Alsdann ist nach Formel 12 (Seite 55) $\mathfrak{M}' = \frac{G\xi\xi_1^2}{l^2}$ $\mathfrak{M}'' = \frac{G\xi^2\xi_1}{l^2}$. Die Ausdrücke 45 (Seite 66) für die Momente an den Stützen des fraglichen Feldes gehen hierdurch über in

$$a.\quad \begin{cases} M_{r-1} = \dfrac{Ga\xi\xi_1}{cl^2}\,[(2l - 3b) - \xi], \\[2ex] M_r \quad = \dfrac{Gb\xi\xi_1}{cl^2}\,[(l - 3a) + \xi]. \end{cases}$$

Liegt nun die Last rechts vom fraglichen Querschnitte, so ist das Moment an demselben nach 22 und 24 (Seite 58):

$$M = \frac{M_{r-1}\,(l - x) + M_r\,x}{l} - \frac{G\xi_1 x}{l},$$

d. i.

$$51.\quad M = \frac{G\xi_1}{cl^3}\Big[\big\{bx - a\,(l - x)\big\}\,\xi^2 + \big\{b\,(l - 3a)\,x + a\,(2l - 3b)\,(l - x)\big\}\,\xi - cl^2 x\Big].$$

Hiernach wird $M = 0$ für

$$52.\quad [bx - a(l-x)]\xi^2 + [b(l-3a)x + a(2l-3b)(l-x)]\xi - cl^2 x = 0.$$

Die zulässige Wurzel dieser quadratischen Gleichung sei ξ_x. Für $x = 0$ ergiebt sich $\xi_x = 0$. Ferner wird $\xi_x = l$ für

$$x = a,$$

d. i. nach §. 45 für den linken Fixpunkt J (Fig. 61) des betreffenden Feldes. Für noch grössere x wird $\xi_x > l$, also unzulässig. M ist nun positiv oder negativ, je nachdem $\xi \lesseqgtr \xi_x$ ist.

Liegt dagegen die Last links vom fraglichen Querschnitte, so wird $M = 0$ für

$$53.\quad [a(l-x) - bx]\xi^2 - 3al(l-x-b)\xi - l^2(l-3a)(l-b-x) = 0$$

Diese Gleichung ergiebt sich aus der Gleichung 52 durch Vertauschung von a mit b, x mit $l - x$ und ξ mit ξ_1. Die zulässige Wurzel sei ξ_{1x}. Für $x = l$ wird $\xi_{1x} = 0$. Ferner wird $\xi_{1x} = l$ für

$$l - x = b,$$

also nach §. 45 für den rechten Fixpunkt K (Fig. 61) des betreffenden Feldes. Für kleinere x wird $\xi_{1x} = l$, also unzulässig. M ist nun positiv oder negativ, je nachdem $\xi_1 \gtreqless \xi_{1x}$ ist.

Hieraus folgt nun: Das Moment wird zum positiven oder negativen Maximum *a)* im linken Theile, wenn der Zug von $x = \xi_x$ bis zur rechten oder linken Stütze reicht; b) im rechten Theile, wenn der Zug von $x_1 = \xi_{1x}$ bis zur linken oder rechten Stütze reicht; c) im mittleren Theile, wenn das Feld gar nicht oder ganz belastet ist (Fig. 65). Die hierin erwähnten Theile sind durch die beiden Fixpuncte J und K (Fig. 61) bestimmt.

Es herrscht hierbei noch die Eigenthümlichkeit, dass die fragliche Stelle für das positive Moment nicht belastet, für das negative Moment belastet ist.

Anstatt für ein angenommenes x das zugehörige ξ zu berechnen, kann man auch umgekehrt für ein angenommenes ξ das zugehörige x bestimmen, was eine Vereinfachung der Berechnung der entsprechenden Momente gewährt. Für den linken Theil ergiebt sich

$$54.\quad \frac{x}{l} = \frac{a(2l - 3b - \xi)\xi}{cl^2 + (2a - b)l\xi - (a + b)\xi^2},$$

und für den rechten Theil

$$55.\quad \frac{x}{l} = \frac{(l-b)(3a\xi - 3al + l^2) - a\xi^2}{l^2(l-3a) + 3al\xi - (a+b)\xi^2}.$$

Dieselben Regeln gelten natürlich auch für die Endfelder; nur ist im ersten Felde $a = o$, im letzten $b = o$ zu setzen. Für das erste Feld geht hiernach die Gleichung 53 über in die einfachere Gleichung

$$b_1 x \xi^2 + l_1^3 (l_1 - b_1 - x) = 0.$$

Demnach ist

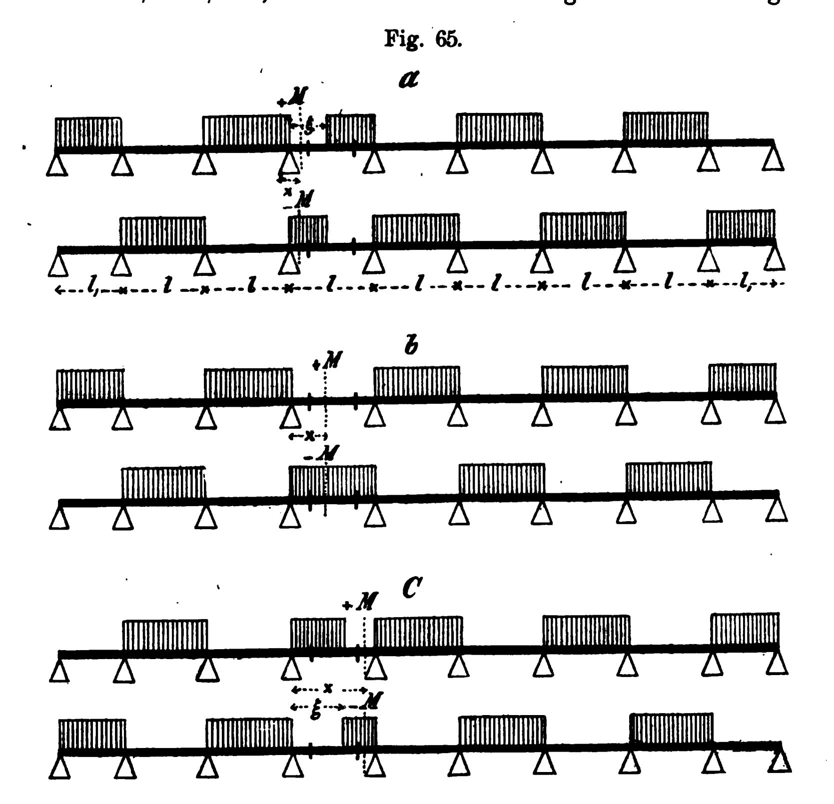
$$56. \quad \xi = l_1 \sqrt{\frac{l_1}{b x} (x + b_1 - l_1)}$$

oder umgekehrt

$$57. \quad \frac{x}{l_1} = \frac{l_1^2 (l_1 - b_1)}{l_1^3 + b_1 \xi^2}.$$

c) Gefährlichste Belastungsweise der übrigen Felder. Ist das I., III., V. etc. der rechts vom fraglichen Felde liegenden Felder belastet, so ist nach §. 45 M im Theile AJ (Fig. 61) negativ, im Theile JB dagegen positiv; ist dagegen das II., IV. etc. Feld belastet, so ist umgekehrt M im Theile AJ positiv, im Theile JB negativ. Ist ferner das I., III., V., etc. der links vom fraglichen Felde liegenden

Fig. 65.



Felder belastet, so ist M im Theile AK positiv, im Theile KB negativ; ist dagegen das II., IV. etc. Feld belastet, so ist umgekehrt M im Theile

AK negativ, im Theile *KB* positiv. Hieraus folgt nun in Verbindung mit der unter *a*) gefundenen Regel:

Das Moment wird zum Maximum, wenn die Felder abwechselnd belastet sind und zwar derart, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes Feld, an das unbelastete Ende desselben ein belastetes Feld stösst (Fig. 65).

Hiernach ist die gefährlichste Belastungsweise in Fig. 65 dargestellt und zwar in *a* für den linken, in *b* für den mittleren und in *c* für den rechten Theil eines beliebigen Feldes.

Die in §. 47 gemachte Bemerkung in Betreff der Theilung der Last in mehrere Theile lässt sich auch hier anwenden.

§. 51. **Bestimmung der Maximalmomente.** *a*) Mittlerer Theil eines Feldes. Für den mittleren oder für den zwischen beiden Fixpunkten liegenden Theil ändert sich die gefährlichste Belastungsweise nicht mit der Aenderung des Querschnittes. Für das positive Maximum ist das Feld gar nicht belastet, also nach Formel 22 und 24 (Seite 58): $Q' = \frac{M' - M''}{l}$, $M = M' - Q'x$, d. i.

$$58. \quad max\,(+M) = M' - (M' - M'')\,\frac{x}{l},$$

so dass sich hier $max\,(+M)$ durch eine gerade Linie darstellen lässt. Für das negative Maximum ist das ganze Feld belastet; hier wird $Q' = \frac{M' - M''}{l} + \frac{pl}{2}$, $M = M' - Q'x + \frac{1}{2}px^2$, d. i.

$$59. \quad max\,(-M) = M' - (M' - M'')\,\frac{x}{l} - \frac{1}{2}px\,(l - x).$$

b) Erster Theil. Für das positive Maximum ist der links vom fraglichen Querschnitte liegende Theil nicht belastet, mithin nach Formel 22 und 24 (Seite 58), wenn wir $Q' = \frac{M' - M''}{l} + \frac{p\xi_1^2}{2l}$ setzen, $M = M' - Q'x$, d. i.

$$60. \quad max\,(+M) = M' - (M' - M'')\,\frac{x}{l} - \frac{p\xi_1^2 x}{2l}.$$

Für das negative Maximum ist der linke Theil bis über den fraglichen Querschnitt hinaus belastet. Hier wird $Q' = \frac{M' - M''}{l} + \frac{p\xi(2l - \xi)}{2l}$, $M = M' - Q'x + \frac{1}{2}px^2$, d. i.

$$61. \quad max\,(-M) = M' - (M' - M'')\,\frac{x}{l} - \frac{px}{2l}\,(2l\xi - \xi^2 - lx).$$

c. Dritter Theil. In ganz gleicher Weise ergiebt sich nun auch für den dritten Theil

$$62. \quad max\,(+M) = M' - (M' - M'')\frac{x}{l} - \frac{p\xi^2\,(l-x)}{2l},$$

$$63. \quad max\,(-M) = M' - (M' - M'')\frac{x}{l} - \frac{p\,(l-x)\,(lx-\xi^2)}{2l}.$$

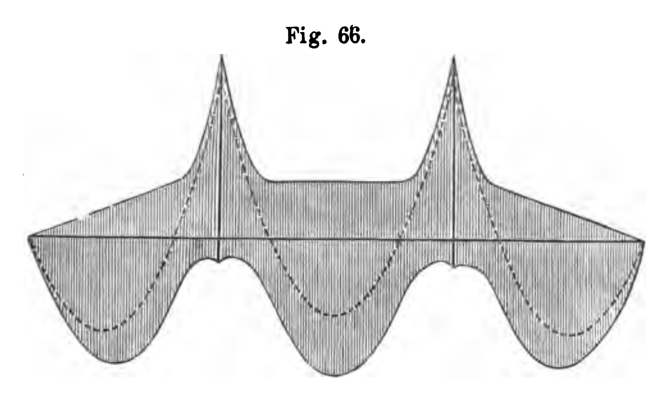
Hat man das eine der beiden Maximalmomente bestimmt, so kann man nach Bestimmung des Momentes M_t für eine totale Belastung das andere auch durch die Beziehung

$$64. \quad max\,(+M) + max\,(-M) = M_t$$

bestimmen.

Das positive Maximum von M erscheint in der graphischen Darstellung (Fig. 66) zusammengesetzt aus einer Geraden (der Nichtbelastung des fraglichen Feldes entsprechend) und 2 Curven höherer Ordnung. Das negative Maximum erscheint zusammengesetzt aus einer Parabel (der totalen Belastung des fraglichen Feldes entsprechend) und zwei Curven höherer Ordnung.

Fig. 66.



Nach Formel 60 wird am Ende des ersten Theiles oder am Fixpunkte, wenn man beachtet, dass am Fixpunkte oder für $x = a$ $\xi_1 = 0$ wird,

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dM'}{dx} - \left(\frac{dM'}{dx} - \frac{dM''}{dx}\right)\frac{x}{l} - \frac{M' - M''}{l}.$$

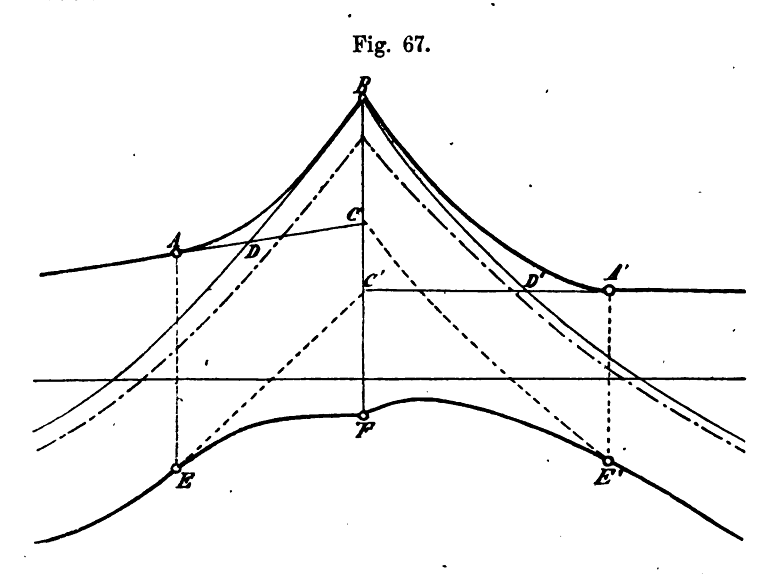
M' und M'' lassen sich darstellen durch einen Ausdruck von der Form $A + B\mathfrak{N}' + C\mathfrak{N}''$; nun aber wird $\frac{d\mathfrak{N}'}{dx}$ und $\frac{d\mathfrak{N}''}{dx}$ nach 19, (S. 56) für $\xi_1 = 0$ ebenfalls $= 0$, mithin

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M' - M''}{l}.$$

Am fraglichen Fixpunkte erzeugt die Belastung aller rechts liegenden Felder kein Moment; mithin hat hier $M' - M''$ für die gefährlichste Belastung in Betreff des ersten und mittleren Theiles denselben Werth. Die Curve für den ersten Theil geht also in die Gerade für den mittleren

Theil tangential über. Natürlich gilt dies auch für den dritten Theil. **Die Curven für die Maximalmomente in den drei Theilen eines Feldes schliessen sich also in den Fixpunkten tangential aneinander an.**

Fig. 67.



Im ersten Felde erscheint die graphische Darstellung natürlich aus einer Geraden und nur einer Curve zusammengesetzt. Hier lässt sich im zweiten Theile *max* (+ *M*) darstellen in der Form

$$65.\quad max\,(+M) = A\frac{x}{l_1} + B + C\frac{l_1}{x}.$$

Bezeichnet man wie früher die Länge des zweiten Theiles mit b, die Abweichung von der Verlängerung AC der Geraden im Abstande mb vom Fixpunkte A mit y, die Abweichung CB an der nächsten Stütze mit c, so ergiebt sich leicht

$$66.\quad y = \frac{(\nu + 1)\,m^2}{\nu + m}\,c,$$

wobei ν die frühere Bedeutung hat. Setzt man hierin $m = \frac{x-a}{b}$, wobei $a = \frac{\nu}{1+\nu}l_1$, $b = \frac{1}{1+\nu}l_1$, also $m = (1+\nu)\frac{x}{l_1} - \nu$, so ergiebt sich mit Beachtung des Ausdruckes 56 von ξ leicht

$$67.\quad y = \frac{x\xi^4}{l_1^{\,5}}\,c,$$

wonach sich y und hiernach *max* (+ *M*) leicht berechnen lässt.

Für die mittleren Felder lässt sich eine derartige einfache Gleichung nicht entwickeln. Annäherungsweise gelten beide Gleichungen aber auch hier. Annähernd wird allgemein, wenn man $\nu = 4$ setzt,

$$68. \quad y = \frac{5m^2}{4+m} c = \frac{x}{l}\left(5 - 4\frac{l}{x}\right)^2 c.$$

Wenn man, wie es mehrfach geschehen ist, die Curven für $max\,(+M)$ in beiden äusseren Theilen als Parabeln annimmt, so erhält man $max\,(+M)$ etwas zu klein, aber noch immer genauer, als wenn man $max\,(+M)$ nur unter der Voraussetzung einer totalen Belastung einzelner Felder bestimmt, wie es meistentheils wirklich geschehen ist. In diesem Falle würde $max\,(+M)$ in den äusseren Theilen als eine gemischt gebrochene Linie ADB, $A'D'B'$ (Fig. 67) erscheinen.

§. 52. **Beispiel.** Wir wählen wieder das in §. 43 in Betreff des Eigengewichtes durchgeführte Beispiel.

Normalmomente. Die beiden Normalgleichungen werden, wenn man darin sofort $l = 1{,}2\,l_1$ setzt,

$$4{,}4\,M_1 + 1{,}2\,M_2 = \mathfrak{N}_1'' + 1{,}2\,\mathfrak{N}_2',$$
$$1{,}2\,M_1 + 4{,}4\,M_2 = 1{,}2\,\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$a. \begin{cases} M_1 = +\,0{,}2455\,\mathfrak{N}_1'' + 0{,}2947\,\mathfrak{N}_2' - 0{,}0804\,\mathfrak{N}_2'' - 0{,}0670\,\mathfrak{N}_3', \\ M_2 = -\,0{,}0670\,\mathfrak{N}_1'' - 0{,}0804\,\mathfrak{N}_2' + 0{,}2947\,\mathfrak{N}_2'' + 0{,}2455\,\mathfrak{N}_3'; \\ M_1 - M_2 = 0{,}3125\,(\mathfrak{N}_1'' - \mathfrak{N}_3') + 0{,}3751\,(\mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2''). \end{cases}$$

Transversalkräfte. I. Feld. Setzen wir in Formel 47 $M' = 0$, $M'' = M_1$, so wird

$$max\,(+Q) = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 p\,l_1.$$

Für $max\,(+Q)$ ist das I. Feld vom Querschnitte bis zur Stütze 1 belastet und das III. Feld total belastet anzunehmen. Daher ist nach Formel 19 und 15 zu setzen:

$$\mathfrak{N}_1'' = p\,\frac{(l_1^2 - x^2)^2}{4\,l_1^2}, \quad \mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0, \quad \mathfrak{N}_3' = \frac{1}{4}\,p\,l_1^2.$$

$$M_1 = 0{,}06138\left(1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right)^2 p\,l_1^2 - 0{,}01675\,p\,l_1^2,$$

daher

$$max\,(+Q) = +\left[0{,}5\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 - 0{,}06138\left(1 - \frac{x^2}{l_1^2}\right)^2 + 0{,}01675\right] p\,l_1$$

$$= +\left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 \left\{0{,}4688 - 0{,}0576\left(1 + \frac{x}{l_1}\right)^2\right\} + 0{,}0157\right] p\,\lambda.$$

Für totale Belastung wird nach §. 43 $Q = \left(0,3546 - 0,9375\frac{x}{l_1}\right) p\lambda$.
Daher ergiebt sich nach Formel 49:

$$max(-Q) = -\left[\frac{x^2}{l_1^2}\left(0,5839 - 0,0576\frac{x^2}{l_1^2}\right) + 0,0723\right] p\lambda.$$

II. Feld. Nach Formel 41 wird

$$max(+Q) = \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 pl.$$

Für $max(+Q)$ ist das I. Feld total und das II. Feld vom Querschnitte bis zur Stütze 2 belastet anzunehmen. Daher ist nach Formel 15 und 19 zu setzen:

$$\mathfrak{R}_1'' = \frac{1}{4}pl_1^2, \quad \mathfrak{R}_2' = p\,\frac{(l-x)^2\,(l^2 + 2lx - x^2)}{4l^2},$$

$$\mathfrak{R}_2'' = p\,\frac{(l^2 - x^2)^2}{4l^2}, \quad \mathfrak{R}_3' = 0.$$

$$M_1 - M_2 = 0,07813\,pl_1^2 - 0,18755\frac{x^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 pl^2$$

$$= \left[0,05426 - 0,18755\frac{x^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\right] pl^2.$$

Dies eingesetzt giebt

$$max(+Q) = +\left[0,5\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\left(1 - 0,1876\frac{x^2}{l^2}\right) + 0,0543\right] pl$$

$$= +\left[\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\left(0,5625 - 0,2109\frac{x^2}{l^2}\right) + 0,0610\right] p\lambda.$$

Für totale Belastung wird nach §. 43 $Q = 0,0625\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) p\lambda$.
Daher wird nach Formel 45:

$$max(-Q) = -\left[\frac{x^2}{l^2}\left\{0,5625 - 0,2109\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\right\} + 0,0611\right] p\lambda.$$

Momente. I. Feld. Nach Formel 35*a* wird

$$\nu_2 = 2.\frac{1 + 1,2}{1,2} = \frac{11}{3} = 3,6667, \quad \nu_1 = \frac{2(1 + 1,2) - 1,2\frac{3}{11}}{1,0} = \frac{224}{55} = 4,0727$$

$$b_1 = \frac{l_1}{5,0727} = 0,1971\,l_1, \quad c_1 = l_1 - b_1 = 0,8029\,l_1.$$

Erster Theil. Für diesen Theil ist für $max(+M)$ nur das II. Feld total belastet anzunehmen. Es ist also in Formel *a*) $\mathfrak{R}_1'' = \mathfrak{R}_3' = 0$, $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = \frac{1}{4}pl^2$ zu setzen. Daher wird

$$M_1 = (0,07368 - 0,02010)\,pl^2 = 0,05358\,pl^2.$$

Setzen wir nun in Formel 58 $M' = 0$, $M'' = M_1 = 0,0536\,pl^2$, so ergiebt sich

$$max(+M) = 0,0536\frac{pl^2x}{l_1} = 0,0678\frac{x}{l}\,p\lambda^2.$$

Bei totaler Belastung wird nach §. 43 $M = -\left(0{,}3324\,\frac{x}{l_1} - 0{,}4395\,\frac{x^2}{l_1^2}\right) p\lambda^2$, mithin nach Formel 64:

$$max\,(-M) = -\left(0{,}4002\,\frac{x}{l_1} - 0{,}4395\,\frac{x^2}{l_1^2}\right) p\lambda^2.$$

Zweiter Theil. Für $max\,(+M)$ muss das II. Feld total und vom I. Felde nur der linke Theil, dessen Länge nach Formel 56 bestimmt ist durch

$$\frac{\xi}{l_1} = \sqrt{5{,}0727 - 4{,}0727\,\frac{l_1}{x}},$$

belastet sein. Setzen wir daher in Formel *a*) $\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = \frac{1}{4} p l^2$, so wird

$$M_1 = 0{,}2455\,\mathfrak{N}_1'' + 0{,}0536\,p l^2$$
$$= \left(0{,}2158\,\frac{\mathfrak{N}_1''}{p l_1^2} + 0{,}0678\right) p l^2.$$

Hierbei wird nach Formel 17

$$\frac{\mathfrak{N}_1''}{p l_1^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\xi^2}{l_1^2}\left(2 - \frac{\xi^2}{l_1^2}\right) = \frac{1}{4}\left[1 - 16{,}5871\left(1 - \frac{l_1}{x}\right)^2\right].$$

Demnach wird

$$M_1 = -\left(0{,}7731 - 1{,}7898\,\frac{l_1}{x} + 0{,}8949\,\frac{l_1^2}{x^2}\right) p\lambda^2.$$

Nach Formel 62 wird nun, wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$max\,(+M) = M_1\,\frac{x}{l_1} - \frac{p\,\xi^2\,(l_1 - x)}{2 l_1},$$

d. i. wenn man für M_1 und ξ die gefundenen Ausdrücke einsetzt,

$$max\,(+M) = +\left(1{,}4561\,\frac{x}{l_1} - 2{,}2292 + 0{,}8949\,\frac{l_1}{x}\right) p\lambda^2.$$

Da für totale Belastung nach §. 43 $M = -\left(0{,}3324\,\frac{x}{l_1} - 0{,}4395\,\frac{x^2}{l_1^2}\right) p\lambda^2$ ist, so wird nach Formel 64

$$max\,(-M) = -\left(1{,}7885\,\frac{x}{l_1} - 0{,}4395\,\frac{x^2}{l_1^2} - 2{,}2292 + 0{,}8949\,\frac{l_1}{x}\right) p\lambda^2.$$

II. Feld. Nach Formel 43*a* wird

$$b = \frac{l}{1 + \nu_2} = \frac{3}{14}\,l = 0{,}2143\,l.$$

Mittlerer Theil. Im mittleren Theile wird M zum positiven Maximum bei totaler Belastung des I. und II. Feldes. Setzen wir dem entsprechend $\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_3' = \frac{1}{4} p l_1^2$, $\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0$, so ergiebt sich $M_1 = M_2 = 0{,}04463\,p l_1^2 = 0{,}03924\,p\lambda^2$. Daher wird nach Formel 58, wenn wir $M' = M_1$, $M' - M'' = 0$ setzen,

$$max\,(+M) = +\,0{,}0392\,p\lambda^2.$$

Nach §. 43 ist bei totaler Belastung des ganzen Trägers $M = \left[0{,}1070 - 0{,}6328\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]p\lambda^2$; mithin wird nach Formel 64:

$$max\,(-M) = \left[0{,}0678 - 0{,}6328\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]p\lambda^2.$$

Erster Theil. Für $max\,(+M)$ muss das I. Feld total belastet sein und im II. Felde nur der rechte Theil, welcher durch Formel 52 bestimmt ist. Setzen wir hierin $a = b = \frac{8}{14}l$, so wird

$$(l - 2x)\,\xi^2 - (1{,}3571\,l - x)\,l\xi + 2{,}6667\,l^2 x = 0$$

oder auf x reducirt

$$x = \frac{(1{,}3571\,l - \xi)\,l\xi}{2{,}6667\,l^2 + l\xi - 2\xi^2}.$$

Setzen wir in den Formeln a $\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4}pl_1^2$, $\mathfrak{N}_3' = 0$, so wird

$$b.\quad \begin{cases} M_1 = \left(0{,}0540 + 0{,}3729\dfrac{\mathfrak{N}_2'}{pl^2} - 0{,}1017\dfrac{\mathfrak{N}_2''}{pl^2}\right)p\lambda^2, \\ M_1 - M_2 = \left(0{,}0687 + 0{,}4747\dfrac{\mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2''}{pl^2}\right)p\lambda^2. \end{cases}$$

Nach Formel 19 ist hierin

$$\frac{\mathfrak{N}_2'}{pl^2} = \frac{1}{4}\frac{\xi_1^2}{l^2}\left(2 - \frac{\xi_1^2}{l^2}\right),\quad \frac{\mathfrak{N}_2'}{pl^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\xi^2}{l^2}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{\xi_1^2}{l^2}\left(2 - \frac{\xi_1}{l}\right)^2,$$

daher

$$M_1 = \left[0{,}0540 + \left(0{,}0848 + 0{,}1017\frac{\xi_1}{l} - 0{,}1187\frac{\xi_1^2}{l^2}\right)\frac{\xi_1^2}{l^2}\right]p\lambda^2,$$

$$M_1 - M_2 = 0{,}0687\left(1 - 3{,}456\frac{\xi^2\xi_1^2}{l^4}\right)p\lambda^2.$$

Demnach wird nun nach Formel 60:

$$c.\quad max\,(+M) = \left[0{,}0540 + \left(0{,}0848 + 0{,}1017\frac{\xi_1}{l} - 0{,}1187\frac{\xi_1^2}{l^2}\right)\frac{\xi_1^2}{l^2}\right]p\lambda^2$$
$$-\left[0{,}0687\left(1 - 3{,}456\frac{\xi^2\xi_1^2}{l^4}\right) + 0{,}6328\frac{\xi_1^2}{l^2}\left[\frac{x}{l}\right.\right. \cdot\varepsilon\gamma d$$

Beispielsweise wird für $x = 0{,}1\,l$:

$$\xi^2 - 1{,}57142\,l\xi + 0{,}33333\,l^2 = 0;$$
$$\xi = 0{,}25279\,l,\quad \xi_1 = 0{,}74721\,l.$$

Dies in die Gleichung für $max\,(+M)$ eingesetzt, giebt

$$max\,(+M) = (0{,}05395 + 0{,}05276 - 0{,}00602 - 0{,}03533)\,p\lambda^2$$
$$= 0{,}06536\,p\lambda^2.$$

Für totale Belastung ist nach § 43 $M = \left[0{,}1070 - 0{,}6328\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]p\lambda^2$, d. i. für $x = 0{,}1l$; $M = +0{,}05009\,p\lambda^2$, also nach Formel 64

$$max\,(-M) = (0{,}05009 - 0{,}06536)\,p\lambda^2 = -0{,}01527\,p\lambda^2.$$

Statt dessen könnte man auch M und $M_1 - M_2$ nach b und sodann $max\,(+M)$ nach 60 berechnen. Zur Berechnung von M_1 und $M_1 - M_2$ kann man, falls man ξ annimmt, die Tabelle zu §. 37 benützen. Beispielsweise wird für $\xi = 0{,}5\,l$, $\mathfrak{N}' = 0{,}1094\,pl^2$, $\mathfrak{N}'' = 0{,}1406\,pl^2$, daher nach b $M_1 = 0{,}0805\,p\lambda^2$, $M_1 - M_2 = 0{,}0539\,p\lambda^2$. Für $\xi = 0{,}5\,l$ aber wird

$$\frac{x}{l} = \frac{(1{,}3571 - 0{,}5)\,0{,}5}{2{,}6667 + 0{,}5 - 2.0{,}5^2} = \frac{0{,}4286}{2{,}6667} = 0{,}1607.$$

mithin nach Formel 60:

$$max\,(+M) = \left[0{,}0805 - \left(0{,}0539 + \tfrac{1}{2}\,.\,0{,}5^2 : 1{,}125^2\right).\,0{,}1607\right] p\lambda^2$$
$$= 0{,}0464\,p\lambda^2.$$

In den Figuren 64 und 66 sind hiernach die Maxima von Q und M graphisch dargestellt.

§. 53. **Anhang. Transversalkraft- und Momentenflächen.** Für die zu einem Träger nöthige Materialmenge ist, wie bereits in §. 33 bemerkt wurde, die Kenntniss der mittleren Transversalkraft und des mittleren Momentes oder die Transversalkraft- und Momentenfläche nöthig, wobei wir, wie dort, sämmtliche Transversalkräfte und Momente in demselben Sinne auftragen (Fig. 68).

Fig. 68.

a. **Eigengewicht.** Die Abstände des Punktes, in welchem die Transversalkraft Null wird, von den beiden Stützen eines Feldes sind $\frac{Q'}{g}$ und $\frac{Q''}{g}$, mithin ist die Transversalkraftfläche $\Sigma Q = \frac{1}{2} Q'.\frac{Q'}{g} + \frac{1}{2} Q''.\frac{Q''}{g}$ oder

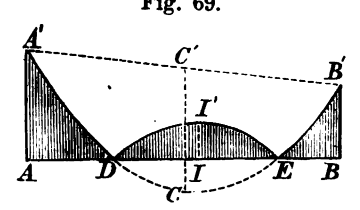
$$\Sigma Q = \frac{Q'^2 + Q''^2}{2g}.$$

Da $Q = \frac{M' - M''}{l} + \frac{1}{2} gl$, $Q'' = -\frac{M' - M''}{l} + \frac{1}{2} gl$ ist, so wird

$$\Sigma Q = \frac{(M' - M'')^2}{gl^2} + \frac{1}{4} gl^2.$$

Bezeichnen wir die Parabelfläche $DJ'E$ mit F, die Parabelfläche $A'CB'$ mit F_1 und die Trapezfläche $AA'B'B$ mit F_2, so ist die Momentenfläche $\Sigma M = F_2 - (F_1 - F) + F = 2F - F_1 + F_2$. Nun aber ist die Höhe $CC' = \frac{1}{8}\,gl^2$, die Höhe JJ', wenn wir $DE = c$ setzen, $= \frac{1}{8}gc^2$, mithin $F = \frac{2}{3}\frac{1}{8}\,gc^2 . c = \frac{1}{12}gc^3$, $F_1 = \frac{2}{3}\frac{1}{8}gl^2 . l = \frac{1}{12}gl^3$, $F_2 = \frac{1}{2}(M' + M'')\,l$, mithin

Fig. 69.



$$69. \quad \Sigma M = \frac{1}{2}(M' + M'')\,l - \frac{1}{12}g\,(l^3 - 2c^3).$$

b) **Zufällige Last.** Für die zufällige Last scheint es wohl am rathsamsten, die Flächen nach Berechnung der Ordinaten mit Hülfe der Simpson'schen Regel oder, nachdem man die Transversalkräfte und Momente graphisch dargestellt, mit Hülfe des Planimeters zu bestimmen. Nur für den mittleren parabolisch begrenzten Theil der Momentenfläche von der Länge c lässt sich der einfache Ausdruck $\frac{1}{2}\,(M_1 + M_2)\,l + \frac{1}{12}gc^3$ aufstellen, wenn M_1, M_2 die Momente an den Enden dieses Theiles bezeichnen.

X. Kapitel.

Specielle Fälle.

A. Träger mit zwei Feldern.

§. 54. **Normalmomente.** In dem Falle eines Trägers mit nur zwei Feldern ist nur eine einzige Normalgleichung vorhanden, nämlich, falls beide Oeffnungen gleiche Weite l haben, $2M_1\,(l + l) = \mathfrak{N}_1''\,l + \mathfrak{N}_2'\,l$, woraus sich

$$70. \quad M_1 = \frac{1}{4}\,(\mathfrak{N}_1'' + \mathfrak{N}_2')$$

ergiebt.

§. 55. **Einfluss des Eigengewichtes.** Setzen wir in der vorigen Gleichung $\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_2' = \frac{1}{4}\,gl^2$, so ergiebt sich als Normalmoment

$$71. \quad M_1 = \frac{1}{8}\,gl^2.$$

Im ersten Felde wird nun, wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen, nach Formel 27:

$$72.\quad Q' = +\frac{3}{8} g l = +0{,}375 g l,\quad Q'' = -\frac{5}{8} g l = -0{,}625 g l,$$

und allgemein

$$73.\quad Q = \frac{1}{8} g\,(3l - 8x) = \left(0{,}375 - \frac{x}{l}\right) g l.$$

Das Moment wird nach Formel 29 $M = 0 - \frac{3}{8} g l x + \frac{1}{2} g x^2$, d. i.

$$74.\quad M = -\frac{1}{8} g x\,(3l - 4x) = \left(0{,}375 - 0{,}5\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l} g l^2.$$

M wird $= 0$ für $x = \frac{3}{4} l = 0{,}75 l$ und zum Maximum für $Q = 0$, d. i. für $x = \frac{3}{8} l = 0{,}375 l$, und zwar ist

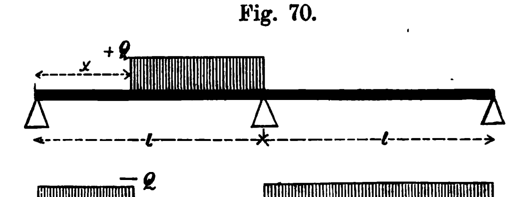
$$75.\quad max\ M = -\frac{9}{128} g l^2 = -0{,}07036\, g l^2.$$

Das absolut grösste Moment findet an der Mittelstütze statt; dasselbe ist ebenso gross, wie das grösste Moment bei einem einfachen Träger mit derselben Spannweite l.

§. 56. Einfluss der zufälligen Last.

a) **Transversalkräfte.** Das positive Maximum von Q tritt ein, wenn nur der rechte Theil des I. Feldes belastet ist (Fig. 70). Für diese Belastungsweise wird nach Formel 70 und 19:

Fig. 70.



$$M_1 = \frac{1}{4}\mathfrak{M}_1'' = \frac{p\,(l^2 - x^2)^2}{16\, l^2} = \frac{p\,(l-x)^2\,(l+x)^2}{16\, l^2}.$$

Setzen wir nun in Formel 47 $M' = 0$, $M'' = M_1$, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$76.\quad max\,(+Q) = +\frac{1}{16}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\left(7 - 2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) p\, l.$$

Bei totaler Belastung ist nach Formel 73 $Q = \frac{1}{8} p\,(3l - 8x)$; nach Formel 49 wird daher nach gehöriger Reduction

$$77.\quad max\,(-Q) = -\frac{1}{16}\left(1 + 10\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^4}{l^4}\right) p\, l.$$

b. **Momente.** Nach Formel 35 *a* ist $v = \frac{2\,(l+l)}{l} = 4$, also nach 40 *a*) $b = \frac{l}{1+4}$, d. i.

$$78.\quad b = \frac{1}{5} l = 0{,}2 l.$$

Erster Theil. M wird zum positiven Maximum, wenn nur das zweite Feld, zum negativen Maximum, wenn nur das erste Feld belastet ist (Fig. 71 *a*). In beiden Fällen wird nach Formel 70, da $\mathfrak{N}_1' + \mathfrak{N}_2'' = \frac{1}{4} p l^2$ zu setzen ist,

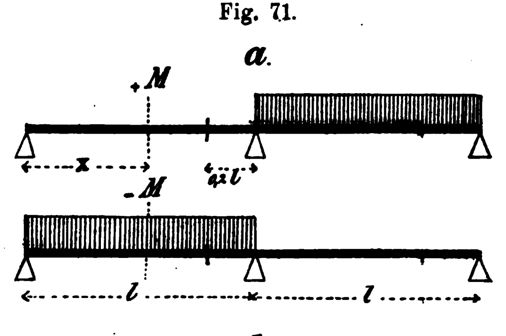
$$M_1 = \frac{1}{16} p l^2.$$

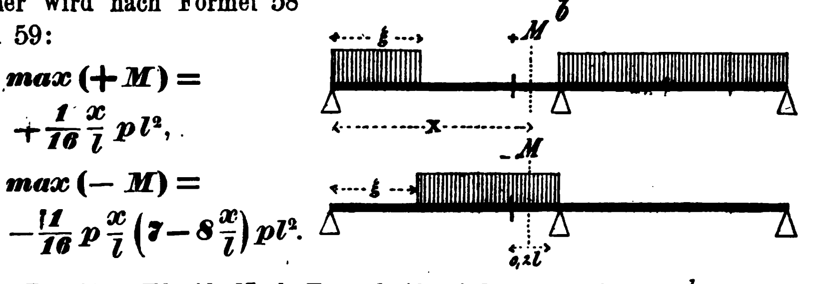
Daher wird nach Formel 58 und 59:

79. $$\mathbf{max\,(+M)} = + \frac{1}{16} \frac{x}{l} p l^2,$$

80. $$\mathbf{max\,(-M)} = - \frac{11}{16} p \frac{x}{l} \left(7 - 8 \frac{x}{l}\right) p l^2.$$

Fig. 71.





Zweiter Theil. Nach Formel 49 wird, wenn wir $b = \frac{1}{5} l$ setzen:

81. $$\xi_x = l \sqrt{5 - 4 \frac{l}{x}}.$$

Für das positive Maximum ist der linke Theil des ersten Feldes bis zu $x = \xi_x$ und das ganze zweite Feld belastet (Fig. 71 *b*). Daher ist $\mathfrak{N}_1'' = \frac{p \xi^2 (2 l^2 - \xi^2)}{4 l^2}$, $\mathfrak{N}_2' = \frac{1}{4} p l^2$ zu setzen. Nach Formel 70 wird daher

$$M_1 = \frac{p}{16 l_2} (l^4 + 2 l^2 \xi^2 - \xi^4)$$

und nun nach Formel 62:

$$max\,(+M) = \frac{p}{16 l^3} (l^4 + 2 l^2 \xi^2 - \xi^4) x - \frac{p}{2 l} \xi^2 (l - x).$$

Setzen wir nach Formel 81 $\xi^2 = l^2 \left(5 - 4 \frac{l}{x}\right)$, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

82. $$\mathbf{max\,(+M)} = + \frac{1}{8} \left(13 \frac{x}{l} - 20 + 8 \frac{l^2}{x^2}\right) p l^2.$$

Für totale Belastung ergiebt sich nach Formel 74 $M = \frac{1}{8} p x (4 x - 3 l)$; daher ist $max\,(-M) = \frac{1}{8} p x (4 x - 3 l) - \frac{1}{8} p l \left(13 x - 20 l + 8 \frac{l^2}{x}\right)$, oder

83. $$\mathbf{max\,(-M)} = - \frac{1}{8} \left(16 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^2}{l^2} - 20 + 8 \frac{l}{x}\right) p l^2.$$

§. 57. **Tabellen.** Nach den aufgestellten Formeln sind die folgenden Tabellen berechnet.

Transversalkräfte.

x	*Transversalkraft*		
	Einfluss von g	*Einfluss von p*	
	Q	$max\,(+Q)$	$max\,(-Q)$
		+	—
0	+ **0,375**	**0,4375**	0,0625
0,1	+ 0,275	0,3437	0,0687
0,2	+ 0,175	0,2624	0,0874
0,3	+ 0,075	0,1932	0,1182
0,375	0	**0,1491**	**0,1491**
0,4	— 0,025	0,1359	0,1609
0,5	— 0,125	0,0898	0,2148
0,6	— 0,225	0,0544	0,2794
0,7	— 0,325	0,0287	0,3537
0,8	— 0,425	0,0119	0,4369
0,9	— 0,525	0,0027	0,5277
1	— **0,625**	0	**0,6250**
$.l$	$.gl$	$.pl$	$.pl$

Stützendrücke: $max D_0 = 0{,}3750\,gl + 0{,}4375\,pl$; $max\, D_1 = 1{,}25(g+p)l$.

Momente.

x	ξ	*Moment*		
		Einfluss v. g	*Einfluss von p*	
		M	$max\,(+M)$	$max\,(-M)$
			+	—
0	—	0	0	0
0,1	—	— 0,0325	0,00625	0,03875
0,2	—	— 0,0550	0,01250	0,06750
0,3	—	— 0,0675	0,01875	0,08625
0,4	—	— 0,0700	0,02500	0,09500
0,5	—	— 0,0625	0,03125	0,09375
0,6	—	— 0,0450	0,03750	0,08250
0,7	—	— 0,0175	0,04375	0,06125
0,75	—	0	**0,04688**	**0,04688**
0,8	0	+ 0,0200	0,05000	0,03000
0,85	0,5423	+ 0,0425	0,05773	0,01523
0,9	0,7454	+ 0,0675	0,07361	0,00611
0,95	0,8885	+ 0,0950	0,09638	0,00188
1	1	+ **0,1250**	**0,12500**	0
$.l$	$.l$	$.gl^2$	$.pl^2$	$.pl^2$

Eigengewicht: $max(-M) = -0{,}07031\,gl^2$ für $x = 0{,}3750\,l$.
Zufällige Last: $max(-M) = -0{,}09566\,pl^2$ für $x = 0{,}4374\,l$.
Mittlere Transversalkraft $\mathfrak{Q} = 0{,}2656\,gl + 0{,}3287\,pl$.
Mittleres Moment . . . $\mathfrak{M} = 0{,}04948\,gl^2 + 0{,}07666\,pl^2$.

B. Träger mit drei Feldern.

§. 58. **Normalmomente.** In dem Falle eines Trägers mit drei Feldern lassen sich zwei Normalgleichungen aufstellen. Wenn die äusseren Felder gleiche Länge l_1 haben, so sind die Normalgleichungen:

$$\begin{cases} 2M_1\,(l_1 + l) + M_2 l = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l, \\ M_1 l + 2M_2\,(l + l_1) = \mathfrak{N}_2'' l + \mathfrak{N}_3' l_1, \end{cases}$$

daher, wenn wir das Verhältniss $\frac{l}{l_1}$ mit n bezeichnen,

$$84.\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{2\,(\mathfrak{N}_1'' + \mathfrak{N}_2' n)\,(1+n) - (\mathfrak{N}_2'' n + \mathfrak{N}_3')\,n}{(2+n)\,(2+3n)}, \\ M_2 = \dfrac{2\,(\mathfrak{N}_3' + \mathfrak{N}_2'' n)\,(1+n) - (\mathfrak{N}_2' n + \mathfrak{N}_1'')\,n}{(2+n)\,(2+3n)}. \end{cases}$$

§. 59. **Einfluss des Eigengewichtes.** Setzen wir in den vorigen Gleichungen $\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_3' = \frac{1}{4} g l_1^2$, $\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = \frac{1}{4} g l^2$, so ergiebt sich

$$85.\quad M_1 = M_2 = \frac{g\,(l_1^3 + l^3)}{4\,(2l_1 + 3l)} = \frac{1 + n^3}{4\,(2 + 3n)}\, g l_1^2.$$

Transversalkräfte. Im I. Felde wird nach Formel 27 (Seite 59), wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$86.\quad Q_1' = +\frac{3 + 6n - n^3}{4\,(2+3n)}\, g l_1, \quad Q_1'' = -\frac{5 + 6n + n^3}{4\,(2+3n)}\, g l_1.$$

und nun allgemein $Q = Q_1' - gx$. Im II. Felde wird $M' = M''$, daher

$$87.\quad Q_2' = +\tfrac{1}{2} g l, \quad Q_2'' = -\tfrac{1}{2} g l.$$

und allgemein $Q = Q_2' - gx = \frac{1}{2} g\,(l - 2x)$.

Stützendrücke. Der Stützendruck D_0 auf die Stütze *0* ist $= Q_1'$. Der Stützendruck D_1 auf die Stütze *1* ist nach 25 (Seite 58) $= -Q_1'' + Q_2'$, d. i.

$$88.\quad D_1 = \frac{5 + 10n + 6n^2 + n^3}{4\,(2 + 3n)}\, g l_1.$$

Momente. Für das I. Feld ergiebt sich, wenn wir in Formel 30 (Seite 59) $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

$$89.\quad M = M_1 \frac{x}{l_1} - \tfrac{1}{2} g x\,(l_1 - x).$$

Für das zweite Feld wird, wenn wir $M' = M'' = M_1$ setzen,

$$90.\quad M = M_1 - \tfrac{1}{8}\, g x\, (l - x).$$

§. 60. Einfluss der zufälligen Last. Nach 35 *a* (Seite 62) wird

$$\nu_2 = \frac{2\,(1+n)}{n}, \quad \nu_1 = 2\,(1+n) - \frac{n}{\nu_2} = \frac{(2+n)\,(2+3n)}{2\,(1+n)}.$$

Demnach wird nun nach 43 (Seite 65):

$$91.\quad b_1 = \frac{l_1}{1+\nu_1} = \frac{2\,(1+n)}{6+10n+3n^2}\, l_1, \quad b_2 = \frac{l}{1+\nu_2} = \frac{n}{2+3n}\, l.$$

Der Symmetrie wegen ist $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

Transversalkräfte. I. Feld. Das positive Maximum von Q tritt ein, wenn der rechte Theil des I. Feldes und das zweite Feld ganz belastet ist (Fig. 72). Alsdann ist in Formel 84 $\mathfrak{N}_1'' = \frac{p\,(l_1^2 - x^2)^2}{4 l_1^2}$,

Fig. 72.

$\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = 0$, $\mathfrak{N}_3' = \frac{1}{4}\, p\, l_1^2$ zu setzen. Daher wird, wenn wir noch $\frac{x}{l_1} = m$ setzen,

$$92.\quad M_1 = \frac{2\,(1+m)\,(1-m^2)^2 - n}{4\,(2+n)\,(2+3n)}\, p\, l_1^2.$$

In der Formel 47 (Seite 69) ist nun $M' = 0$, $M'' = M_1$ zu setzen, daher

$$93.\quad max\,(+Q) = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 p\, l_1.$$

Für totale Belastung ist Q durch den vorigen §. bestimmt; bezeichnen wir dieses Q mit Q_t, so ist $max\,(-Q) = Q_t - max\,(+Q)$.

II. Feld. Nach den Gleichungen 84 wird allgemein

$$M_1 - M_2 = \frac{\mathfrak{N}_1'' + n\,(\mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2'') - \mathfrak{N}_3'}{2+n}.$$

Das positive Maximum von Q tritt bei der Belastung des II. Feldes ein (Fig. 72). Für diese Belastung ist $\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4} p l_1^2$, $\mathfrak{N}_3'' = 0$, und nach 19 (Seite 56) $\mathfrak{N}_2' - \mathfrak{N}_2'' = -\frac{px^2\,(l-x)^2}{2l^2}$, daher

$$M_1 - M_2 = \frac{1 - 2n^3m^2\,(1-m)^2}{4\,(2+m)}\,p l_1^2.$$

Nach 47 (Seite 69) wird demnach

$$94.\quad max\,(+Q) = +\,\frac{1 + 2n^2\,(1-m)^2\,(2+n-nm^2)}{4n\,(2+n)}\,p l_1.$$

Hieraus ergiebt sich $max\,(-Q)$ ohne Weiteres durch Verwechslung von m mit $1-m$ und Veränderung des Vorzeichens, also

$$95.\quad max\,(-Q) = -\,\frac{1 + 2n^2m^2\,[2+n-n\,(1-m)^2]}{4n\,(2+n)}\,p l_1.$$

Momente. I. Feld. Erster Theil. M wird zum positiven Maximum bei Belastung des II., und zum negativen bei Belastung des I. und III. Feldes (Fig. 73a). Nach Formel 84 wird bezüglich $M_1 = \frac{n^3}{4(2+3n)} p l_1^2$, $\bar{M}_1 = \frac{1}{4(2+3n)} p l_1^2$, daher nach Formel 58 und 59 (Seite 73), wenn wir $M' = 0$, $M'' = M_1$ setzen,

Fig. 73.

$$96.\quad \begin{cases} max\,(+M) = +\,\frac{n^3}{4\,(2+3n)}\,\frac{x}{l_1}\,p l_1^2, \\ max\,(-M) = -\left[\frac{1}{4\,(2+3n)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)\right]\frac{x}{l_1}\,p l_1^2. \end{cases}$$

Zweiter Theil. M wird zum positiven Maximum, wenn der Zug von der linken Stütze bis zu

$$97.\quad \xi_x = l_1 \sqrt{1 + \nu_1 - \nu_1 \frac{l_1}{x}}$$

reicht und das II. Feld ganz belastet ist (Fig. 73*b*). Nach Formel 84 wird für diese Belastungsweise, wenn wir $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = \frac{1}{4} p l^2$, $\mathfrak{R}_3' = 0$ setzen,

$$M_1 = \frac{8(1+n)\mathfrak{R}_1 + (2+n) n^3 p l_1^2}{4(2+n)(3+2n)}.$$

Hierbei ist nach Formel 17 (Seite 55):

$$98.\quad \mathfrak{R}_1'' = \frac{p\xi^2(2l_1^2 - \xi^2)}{4l_1^2} = \frac{1}{4}\left[1 - \nu_1^2\left(1 - \frac{l_1}{x}\right)^2\right] p l_1^2.$$

Nach Formel 62 (Seite 74) wird nun

$$99.\quad max(+M) = M_1 \frac{x}{l_1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)\frac{\xi^2}{l_1^2} p l_1^2.$$

Das $max(-M)$ berechnet man am besten nach der Regel $max(-M) = M_t - max(+M)$.

II. Feld. Erster Theil. Setzen wir in Gleichung 52 $a = b$, so wird

$$a(l - 2x)\xi^2 - a(2l - 3a - x) l\xi - (l - 2a) l^2 x = 0,$$

oder nach Einsetzung des Werthes für a:

$$100.\quad (l - 2x)\xi^2 - \left(\frac{4+3n}{2+3n} l - x\right) l\xi + \frac{2+n}{n} l^2 x = 0$$

oder auf x reducirt,

$$101.\quad x = \frac{n[(4+3n)l - (2+3n)\xi] l\xi}{(2+3n)[(2n+n)l^2 - nl\xi - 2n\xi^2]}.$$

M wird nun zum positiven Maximum, wenn das II. Feld von $x = \xi$ bis zum rechten Ende desselben und das ganze I. Feld belastet sind (Fig. 74*a*). Für diese Belastungsweise wird nach 84

$$102.\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{2(1+n)pl_1^2 + 8n(1+n)\mathfrak{R}_2' - 4n^2\mathfrak{R}_2''}{4(2+n)(2+3n)}, \\[2ex] M_2 = \dfrac{-npl_1^2 - 4n^2\mathfrak{R}_2' + 8n(1+n)\mathfrak{R}_2''}{4(2+n)(2+3n)}; \\[2ex] M_1 - M_2 = \dfrac{pl_1^2 + 4n(\mathfrak{R}_2' - \mathfrak{R}_2'')}{4(2+n)}. \end{cases}$$

Nach Formel 60 (Seite 73) wird nun

$$103.\quad max(+M) = M' - (M' - M'')\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^2 p l^2.$$

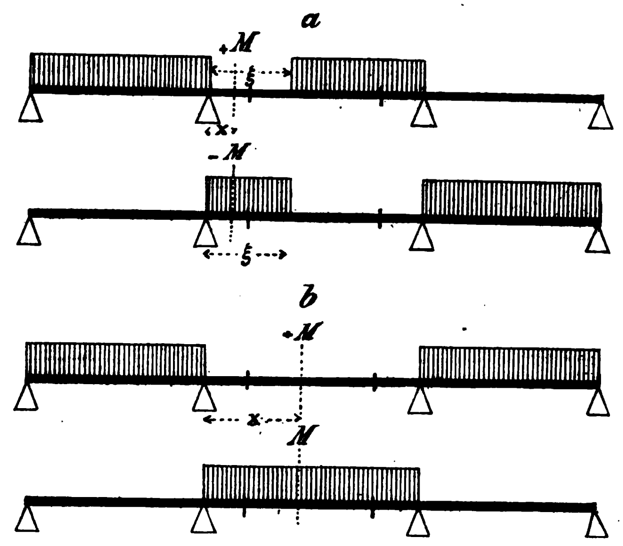
Das negative Maximum wird man am besten nach der Regel $max(-M) = M_t - max(+M)$ berechnen.

Mittlerer Theil. Im mittleren Theile wird M zum positiven Maximum bei Belastung der beiden äusseren, zum negativen Maximum bei Belastung des mittleren Feldes (Fig. 74*b*). Für die erstere Belastungsweise wird nach 84, wenn wir $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_3' = \frac{1}{4} p l_1^2$, $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = 0$ setzen

$$104. \quad M_1 = M_2 = \frac{1}{4(2+3n)} p l_1^2.$$

Da in Formel 58 (Seite 73) $M' = M''$ zu setzen ist, so wird einfach

Fig. 74



$max(+M) = M_1$. Für das negative Maximum wird $M_1 = M_2 = \frac{n}{4(2+3n)} p l^2$, mithin nach Formel 59 (Seite 73)

$$105. \quad max(-M) = \frac{n}{4(2+3n)} p l^2 - \frac{1}{2} p \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) p l^2.$$

§. **61. Tabellen.** Nach den gegebenen Regeln sind die folgenden Tabellen berechnet. Für die Tabellen erscheint es am geeignetsten, das arithmetische Mittel λ der drei Spannweiten als Maas einzuführen. Da alsdann $2l_1 + l = 3\lambda$, $l = nl_1$ ist, so wird

$$l_1 = \frac{3}{2+n}\lambda, \quad l = \frac{3n}{2+n}\lambda.$$

1 : 1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	+ 0,4	0,4500	0,0500
0,1	+ 0,3	0,3560	0,0563
0,2	+ 0,2	0,2752	0,0752
0,3	+ 0,1	0,2065	0,1065
0,4	0	**0,1496**	**0,1496**
0,5	— 0,1	0,1042	0,2042
0,6	— 0,2	0,0694	0,2694
0,7	— 0,3	0,0443	0,3443
0,8	— 0,4	0,0280	0,4280
0,9	— 0,5	0,0193	0,5191
1	— 0,6	0,0167	**0,6167**
II. Feld		+	—
0	+ 0,5	**0,5833**	0,0833
0,1	+ 0,4	0,4870	0,0870
0,2	+ 0,3	0,3991	0,0991
0,3	+ 0,2	0,3210	0,1210
0,4	+ 0,1	0,2537	0,1537
0,5	0	**0,1979**	**0,1979**
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendrücke.

$$max\ D_0 = 0{,}40\,g\lambda + 0{,}45\,p\lambda;$$
$$max\ D_1 = 1{,}1\,g\lambda + 1{,}2\,p\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\mathfrak{Q} = 0{,}2567\,g\lambda + 0{,}3425\,p\lambda.$$

1 : 1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ $\frac{\xi}{l}$	*Moment*		
		Einfluss v. g	*Einfluss von p*	
		M	*max (+ M)*	*max (— M)*
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,035	0,005	0,040
0,2		— 0,060	0,010	0,070
0,3		— 0,075	0,015	0,090
0,4		— 0,080	0,020	0,100
0,5		— 0,075	0,025	0,100
0,6		— 0,060	0,030	0,090
0,7		— 0,035	0,035	0,070
0,7895	0	— 0,00414	0,03948	0,04362
0,8	0,2500	0	**0,04022**	**0,04022**
0,85	0,5816	+ 0,02125	0,04898	0,02773
0,9	0,7638	+ 0,04500	0,06542	0,02042
0,95	0,8959	+ 0,07125	0,08831	0,01706
1	1	+ **0,10000**	**0,11667**	0,01667
II. Feld			+	—
0	0	+ **0,10000**	**0,11667**	0,01667
0,05	0,1209	+ 0,07625	0,09033	0,01408
0,1	0,2785	+ 0,05500	0,06248	0,00748
0,15	0,5000	+ 0,03625	0,05678	0,02053
0,2	1	+ 0,020	0,050	0,030
0,2764		0	**0,050**	**0,050**
0,3		— 0,005	0,050	0,055
0,4		— 0,020	0,050	0,070
0,5		— **0,025**	0,050	**0,075**
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $max\,(-M) = -0{,}080\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}4\,l_1$.
II. „ „ $(-M) = -0{,}025\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.

Zufällige Last: I. Feld. $max\,(-M) = -0{,}10125\,p\lambda^2$ für $x = 0{,}45\,l_1$,
II. „ „ $(-M) = -0{,}07500\,p\lambda^2$ „ $x = 0{,}50\,l$.

Mittleres Moment.

$$\mathfrak{M} = 0{,}04519\,g\lambda^2 + 0{,}07068\,p\lambda^2.$$

1 : 1,1 : 1.

$$l_1 = \frac{30}{31}\lambda = 0{,}96774\,\lambda, \quad l = \frac{33}{31}\lambda = 1{,}06451\,\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l_1}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	+ **0,3775**	**0,4382**	0,0607
0,1	+ 0,2807	0,3475	0,0668
0,2	+ 0,1839	0,2689	0,0850
0,3	+ 0,0871	0,2021	0,1150
0,3900	0	**0,1519**	**0,1519**
0,4	— 0,0096	0,1468	0,1564
0,5	— 0,1064	0,1024	0,2088
0,6	— 0,2032	0,0683	0,2715
0,7	— 0,3000	0,0437	0,3437
0,8	— 0,3967	0,0275	0,4242
0,9	— 0,4935	0,0188	0,5123
1	— **0,5903**	0,0162	**0,6065**
II. Feld		+	—
0	+ **0,5323**	**0,6032**	0,0709
0,1	+ 0,4258	0,5005	0,0747
0,2	+ 0,3194	0,4068	0,0876
0,3	+ 0,2129	0,3234	0,1105
0,4	+ 0,1065	0,2517	0,1452
0,5	0	**0,1922**	**0,1922**
	. gλ	. pλ	. pλ

Stützendruck.

$$max\ D_0 = 0{,}3775\,g\lambda + 0{,}4382\,p\lambda;$$
$$max\ D_I = 1{,}1226\,g\lambda + 1{,}2097\,p\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\mathfrak{Q} = 0{,}2580\,g\lambda + 0{,}3325\,p\lambda.$$

1 : 1,1 : 1.

$$l_1 = \frac{30}{31}\lambda = 0{,}96774\lambda, \quad l = \frac{33}{31}\lambda = 1{,}06451\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ $\frac{\xi}{l}$	*Moment*		
		Einfluss v. g	*Einfluss von p*	
		M	*max (+ M)*	*max (— M)*
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,03185	0,00588	0,03773
0,2		— 0,05433	0,01176	0,06609
0,3		— 0,06744	0,01764	0,08508
0,4		— 0,07119	0,02351	0,09470
0,5		— 0,06558	0,02939	0,09497
0,6		— 0,05060	0,03527	0,08587
0,7		— 0,02626	0,04114	0,06740
0,7801		0	**0,04586**	**0,04586**
0,7964	0	+ 0,00161	0,04683	0,04075
0,8	0,1483	+ 0,00761	0,04706	0,03945
0,85	0,5565	+ 0,02782	0,05486	0,02704
0,9	0,7519	+ 0,05053	0,07013	0,01960
0,95	0,8911	+ 0,07558	0,09171	0,01613
1	1	**+ 0,10297**	**0,11865**	0,01568
II. Feld			+	—
0	0	**+ 0,10297**	**0,11865**	0,01568
0,05	0,1155	+ 0,07606	0,08976	0,01370
0,1	0,2644	+ 0,05198	0,06723	0,01525
0,15	0,4709	+ 0,03073	0,05232	0,02159
0,2	0,8288	+ 0,01231	0,04478	0,03247
0,2075	1	+ 0,00992	0,04417	0,03427
0,2368		0	**0,04417**	**0,04417**
0,3		— 0,01701	0,04417	0,06118
0,4		— 0,03301	0,04417	0,07718
0,5		**— 0,03868**	0,04417	**0,08285**
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: *I. Feld.* $max\,(-M) = -0{,}07124\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}3901\,l_1$,
II. „ „ $(-M) = -0{,}03868\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.
Zufällige Last: *I. Feld.* $max\,(-M) = -0{,}09602\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}4528\,l_1$,
II. „ „ $(-M) = -0{,}08285\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.

Mittleres Moment.

$$\mathfrak{M} = 0{,}04344\,g\lambda^2 + 0{,}07011\,p\lambda^2.$$

1 : 1,2 : 1.

$l_1 = \frac{15}{16}\lambda = 0,9375\,\lambda, \quad l = \frac{9}{8}\lambda = 1,1250\,\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	+ **0,3546**	**0,4269**	0,0723
0,1	+ 0,2608	0,3390	0,0782
0,2	+ 0,1671	0,2627	0,0956
0,3	+ 0,0733	0,1977	0,1244
0,3782	0	**0,1547**	**0,1547**
0,4	— 0,0204	0,1438	0,1642
0,5	— 0,1142	0,1005	0,2147
0,6	— 0,2079	0,0671	0,2750
0,7	— 0,3017	0,0429	0,3446
0,8	— 0,3954	0,0270	0,4224
0,9	— 0,4892	0,0183	0,5075
1	— **0,5829**	0,0157	**0,5986**
II. Feld		+	—
0	+ **0,5625**	**0,6235**	0,0610
0,1	+ 0,4500	0,5150	0,0650
0,2	+ 0,3375	0,4156	0,0781
0,3	+ 0,2250	0,3274	0,1024
0,4	+ 0,1125	0,2514	0,1389
0,5	0	**0,1885**	**0,1885**
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendruck.

$max\ D_0 = 0,3546\,g\,l + 0,4269\,p\,\lambda.$
$max\ D_1 = 1,1454\,g\,l + 1,2221\,p\,\lambda.$

Mittlere Transversalkraft.

$\mathfrak{Q} = 0,2607\,g\lambda + 0,3450\,p\,\lambda.$

1 : 1,2 : 1.

$l_1 = \frac{15}{16}\lambda = 0{,}9375\,\lambda, \quad l = \frac{9}{8}\lambda = 1{,}1250\,\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ / $\frac{\xi}{l}$	Moment: Einfluss v. g — M	Moment: Einfluss von p — max (+ M)	Moment: Einfluss von p — max (− M)
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,02885	0,00678	0,03563
0,2		— 0,04890	0,01356	0,06246
0,3		— 0,06017	0,02034	0,08051
0,4		— 0,06265	0,02710	0,08975
0,5		— 0,05634	0,03390	0,09024
0,6		— 0,04124	0,04069	0,08193
0,7		— 0,01736	0,04746	0,06482
0,7564		0	**0,05127**	**0,05127**
0,8		+ 0,01532	0,05424	0,03892
0,8029	0	+ 0,01639	0,05443	0,03804
0,85	0,5304	+ 0,03496	0,06016	0,02520
0,9	0,7399	+ 0,05679	0,07558	0,01879
0,95	0,8864	+ 0,08082	0,09606	0,01524
1	1	**+ 0,10704**	**0,12176**	0,01472
II. Feld			+	—
0	0	**+ 0,10704**	**0,12176**	0,01472
0,05	0,1104	+ 0,07698	0,08995	0,01297
0,1	0,2528	+ 0,05009	0,06536	0,01527
0,15	0,4475	+ 0,02637	0,04882	0,02245
0,2	0,7619	+ 0,00579	0,04039	0,03460
0,2143	1	+ 0,00050	0,03923	0,03875
0,2157		0	**0,03923**	**0,03923**
0,3		— 0,02585	0,03923	0,06508
0,4		— 0,04483	0,03923	0,08406
0,5		**— 0,05116**	0,03923	**0,09040**
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. max $(-M) = -0{,}06286\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}378\,l_1$,
II. „ „ $(-M) = -0{,}05116\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.

Zufällige Last: I. Feld. max $(-M) = -0{,}09111\,p\lambda^2$ für $x = 0{,}456\,l_1$,
II. „ „ $(-M) = -0{,}09040\,p\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.

Mittleres Moment.

$\mathfrak{M} = -0{,}04242\,g\lambda^2 + 0{,}06997\,p\lambda^2.$

1 : 1,3 : 1.

$l_1 = \frac{10}{11}\lambda = 0{,}90909\,\lambda, \quad l = \frac{13}{11}\lambda = 1{,}18182\,\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	+ **0,3314**	**0,4160**	0,0846
0,1	+ 0,2405	0,3307	0,0902
0,2	+ 0,1496	0,2566	0,1070
0,3	+ 0,0587	0,1934	0,1347
0,3646	0	**0,1583**	**0,1583**
0,4	— 0,0322	0,1409	0,1731
0,5	— 0,1232	0,0986	0,2218
0,6	— 0,2141	0,0659	0,2800
0,7	— 0,3050	0,0421	0,3471
0,8	— 0,3959	0,0264	0,4223
0,9	— 0,4868	0,0178	0,5046
0	— **0,5777**	0,0152	**0,5929**
II. Feld		+	—
1	+ **0,5909**	**0,6439**	0,0530
0,1	+ 0,4727	0,5298	0,0571
0,2	+ 0,3545	0,4252	0,0707
0,3	+ 0,2364	0,3323	0,0959
0,4	+ 0,1182	0,2523	0,1341
0,5	0	**0,1862**	**0,1862**
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendruck.

$max\ D_0 = 0{,}3314\,g\lambda + 0{,}4160\,p\lambda.$

$max\ D_1 = 1{,}1686\,g\lambda + 1{,}2368\,p\lambda.$

Mittlere Transversalkraft.

$\mathfrak{Q} = 0{,}2642\,g\lambda + 0{,}3487\,p\lambda.$

1 : 1,3 : 1.

$l_1 = \frac{10}{11}\lambda = 0{,}90909\lambda, \quad l = \frac{13}{11}\lambda = 1{,}18182\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ / $\frac{\xi}{l}$	Moment: Einfluss v. g — M	Moment: Einfluss von p — max (+ M)	Moment: Einfluss von p — max (− M)
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,02599	0,00769	0,03369
0,2		— 0,04373	0,01539	0,05911
0,3		— 0,05319	0,02308	0,07627
0,4		— 0,05439	0,03077	0,08517
0,5		— 0,04733	0,03847	0,08580
0,6		— 0,03200	0,04616	0,07816
0,7		— 0,00841	0,05385	0,06226
0,7291		0	**0,05609**	**0,05609**
0,8		+ 0,02341	0,06155	0,03810
0,8089	0	+ 0,02668	0,06225	0,03556
0,85	0,5031	+ 0,04247	0,06804	0,02557
0,9	0,7278	+ 0,06356	0,08155	0,01799
0,95	0,8816	+ 0,08673	0,10108	0,01435
1	1	**+ 0,11196**	**0,12575**	0,01380
II. Feld			+	—
0	0	**+ 0,11196**	**0,12575**	0,01380
0,05	0,1067	+ 0,07878	0,09124	0,01246
0,1	0,2429	+ 0,04910	0,06433	0,01523
0,15	0,4282	+ 0,02357	0,04610	0,02253
0,2	0,7152	+ 0,00022	0,03672	0,03650
0,2005	0,7207	0	**0,03644**	**0,03644**
0,2203	1	— 0,00802	0,03503	0,04305
0,3		— 0,03469	0,03503	0,06972
0,4		— 0,05566	0,03503	0,09069
0,5		**— 0,06264**	0,03503	**0,09767**
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: *I. Feld.* $max\,(-M) = -\,0{,}05491\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}365\,l_1$,
II. „ $max\,(-M) = -\,0{,}06263\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.
Zufällige Last: *I. Feld.* $max\,(-M) = -\,0{,}08654\,p\lambda^2$ für $x = 0{,}458\,l_1$,
II. „ $max\,(-M) = -\,0{,}09767\,p\lambda^2$ „ $x = 0{,}5\,l$.

Mittleres Moment.

$\mathfrak{M} = 0{,}04243\,g\lambda^2 + 0{,}07075\,p\lambda^2.$

C. Träger mit vier Feldern.

§. 62. **Normalmomente.** Hier existiren drei Normalgleichungen, nämlich, wenn sowohl die äusseren Oeffnungen gleiche Spannweite l_1, als auch die beiden mittleren Oeffnungen gleiche Spannweite l haben:

$$\begin{cases} 2M_1(l_1 + l) + M_2 l = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}_2' l, \\ M_1 l + 4M_2 l \qquad + M_3 l = \mathfrak{N}_2'' l + \mathfrak{N}_3' l, \\ M_2 l + 2M_3(l + l_1) \qquad = \mathfrak{N}_3'' l + \mathfrak{N}_4' l_1. \end{cases}$$

Die Auflösung giebt, wenn wir dabei $l = nl_1$ setzen,

$$106. \begin{cases} M_1 = \dfrac{(8+7n)(\mathfrak{N}_1'' + n\mathfrak{N}_2') - 2n(1+n)(\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3') + n^2\mathfrak{N}_3'' + n\mathfrak{N}_4'}{4(1+n)(4+3n)}, \\ M_2 = \dfrac{-\mathfrak{N}_1'' - n\mathfrak{N}_2' + 2(1+n)(\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3') - n\mathfrak{N}_3'' - \mathfrak{N}_4'}{2(4+3n)}, \\ M_3 = \dfrac{n\mathfrak{N}_1'' + n^2\mathfrak{N}_2' - 2n(1+n)(\mathfrak{N}_2'' + \mathfrak{N}_3') + (8+7n)(n\mathfrak{N}_3'' + \mathfrak{N}_4')}{4(1+n)(4+3n)}. \end{cases}$$

Ist nur das Eigengewicht zu berücksichtigen, so ist $\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_4' = \frac{1}{4} g l_1^2$, jedes der übrigen $\mathfrak{N} = \frac{1}{4} g l^2$ zu setzen. Daher wird

$$107. \quad M_1 = \frac{n^3 + 2}{4(4+3n)} g l_1^2, \quad M_2 = \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{4(4+3n)} g l_1^2.$$

Auf eine Aufstellung der Ausdrücke für die übrigen Grössen wollen wir verzichten, da sich gegen die entwickelten allgemeinen Fälle keine besonderen Vereinfachungen ergeben.

§. 63. **Tabellen.** In den folgenden Tabellen ist wiederum das arithmetische Mittel λ der vier Spannweiten als Maass eingeführt. Hierbei ist $2(l_1 + l) = 4\lambda$, oder, da $l = nl_1$ ist,

$$l_1 = \frac{2}{1+n}\lambda, \quad l = \frac{2n}{1+n}\lambda.$$

Bei diesen Tabellen ist vorausgesetzt, dass sich die zufällige Last auch in drei einzelne Theile trennen könne.

Wenn man voraussetzt, dass sich die zufällige Last nur in zwei Theile trennen könne, so ist eine Verminderung einzelner Werthe um folgende Grössen vorzunehmen, wobei die Verminderung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen gedacht ist.

$\frac{l}{l_1}$	Verminderung der Transversalkraft	
	I. Feld	II. Feld
	max (— Q)	max (+ Q)
1,0	0,0045	0,0223
1,1	0,0043	0,0187
1,2	0,0041	0,0159
1,3	0,0039	0,0136
	. $p\lambda$	. $p\lambda$

$\frac{l}{l_1}$	Verminderung des Momentes		
	I. Feld. Zweiter Theil.	II. Feld. Erster Theil.	II. Feld. Dritter Theil.
	max (+ M)	max (+ M)	max (— M)
1,0	$0,00893 \frac{x}{l}$,	$0,00893 - 0,02679 \frac{x}{l}$	$0,02679 \frac{x}{l} - 0,00893$
1,1	$0,00854 \frac{x}{l}$,	$0,00854 - 0,02407 \frac{x}{l}$	$0,02407 \frac{x}{l} - 0,00854$
1,2	$0,00816 \frac{x}{l}$,	$0,00816 - 0,02175 \frac{x}{l}$	$0,02175 \frac{x}{l} - 0,00816$
1,3	$0,00778 \frac{x}{l}$,	$0,00778 - 0,01974 \frac{x}{l}$	$0,01974 \frac{x}{l} - 0,00778$
	. $p\lambda^2$	. $p\lambda^2$	. $p\lambda^2$

Die Verminderung ist nur insoweit vorzunehmen, als hierdurch das Moment nicht kleiner wird, als das durch eine Gerade repräsentirte positive Maximalmoment, respective das durch eine Parabel repräsentirte negative Maximalmoment.

1 : 1 : 1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	**+ 0,3929**	**0,4464**	0,0535
0,1	+ 0,2929	0,3528	0,0599
0,2	+ 0,1929	0,2717	0,0788
0,3	+ 0,0929	0,2029	0,1101
0,3929	0	**0,1498**	**0,1498**
0,4	— 0,0071	0,1461	0,1533
0,5	— 0,1071	0,1007	0,2079
0,6	— 0,2071	0,0660	0,2731
0,7	— 0,3071	0,0410	0,3481
0,8	— 0,4071	0,0247	0,4319
0,9	— 0,5071	0,0160	0,5231
1	**— 0,6071**	0,0134	0,6205
II. Feld		+	—
0	**+ 0,5357**	**0,6027**	0,0670
0,1	+ 0,4357	0,5064	0,0707
0,2	+ 0,3357	0,4187	0,0830
0,3	+ 0,2357	0,3410	0,1153
0,4	+ 0,1357	0,2742	0,1385
0,5	+ 0,0357	0,2190	0,1833
0,5357	0	**0,2028**	**0,2028**
0,6	— 0,0643	0,1755	0,2398
0,7	— 0,1643	0,1435	0,3078
0,8	— 0,2643	0,1222	0,3865
0,9	— 0,3643	0,1106	0,4749
1	**— 0,4643**	0,1071	**0,5714**
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendrücke.

$$max\ D_0 = 0{,}3929\, g\lambda + 0{,}4464\, p\lambda,$$
$$max\ D_1 = 1{,}1428\, g\lambda + 1{,}2232\, p\lambda,$$
$$max\ D_2 = 0{,}9286\, g\lambda + 1{,}1428\, p\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\mathfrak{Q} = 0{,}2564\, g\lambda + 0{,}3512\, p\lambda.$$

1 : 1 : 1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ $\frac{\xi}{l}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
		M	max (+ M)	max (− M)
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,03429	0,00536	0,03964
0,2		— 0,05857	0,01071	0,06929
0,3		— 0,07286	0,01607	0,08893
0,4		— 0,07714	0,02143	0,09857
0,5		— 0,07143	0,02679	0,09822
0,6		— 0,05572	0,03214	0,08786
0,7		— 0,03000	0,03750	0,06750
0,7857		0	**0,04209**	**0,04209**
0,7887	0	+ 0,00117	0,04225	0,04108
0,8	0,2582	+ 0,00571	0,04309	0,03738
0,85	0,5841	+ 0,02732	0,05216	0,02484
0,9	0,7650	+ 0,05143	0,06772	0,01629
0,95	0,8964	+ 0,07803	0,09197	0,01393
1,0	1	+ **0,10714**	**0,12054**	0,01340
II. Feld			+	—
0	0	+ **0,10714**	**0,12054**	0,01340
0,05	0,1216	+ 0,08160	0,09323	0,01163
0,1	0,2732	+ 0,05857	0,07212	0,01455
0,15	0,5037	+ 0,03803	0,06340	0,02537
0,2	1	+ 0,02000	0,05000	0,03000
0,2661		0	**0,04882**	**0,04882**
0,3		— 0,00857	0,04821	0,05678
0,4		— 0,02714	0,04643	0,07357
0,5		— 0,03572	0,04464	0,08036
0,6		— 0,03429	0,04286	0,07715
0,7		— 0,02286	0,04107	0,06393
0,7895	1	— 0,00416	0,03947	0,04363
0,8	0,7927	— 0,00143	0,04027	0,04170
0,8053	0,7625	0	**0,04092**	**0,04092**
0,85	0,4569	+ 0,01303	0,04754	0,03451
0,9	0,2574	+ 0,03000	0,06105	0,03105
0,95	0,1124	+ 0,04947	0,08120	0,03173
1,0	0	+ **0,07143**	**0,10714**	0,03571
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $max(-M) = -0{,}0771\, g\lambda^2$ für $x = 0{,}393\, l_1$,
II. „ $max(-M) = -0{,}0363\, g\lambda^2$ „ $x = 0{,}536\, l$.
Zufällige Last: I. Feld. $max(-M) = -0{,}0997\, g\lambda^2$ für $x = 0{,}446\, l_1$,
II. „ $max(-M) = -0{,}0805\, g\lambda^2$ „ $x = 0{,}512\, l$.

Mittleres Moment.

$$\mathfrak{M} = 0{,}04158\, g\lambda^2 + 0{,}07031\, p\lambda^2.$$

1 : 1,1 : 1,1 : 1.

$l_1 = \frac{20}{21}\lambda = 0,95238\lambda$. $l = \frac{22}{21}\lambda = 1,04762\lambda$.

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	+ **0,3676**	**0,4313**	0,0637
0,1	+ 0,2723	0,3420	0,0697
0,2	+ 0,1771	0,2646	0,0875
0,3	+ 0,0818	0,1989	0,1171
0,3859	0	**0.1515**	**0,1515**
0,4	— 0,0134	0,1444	0,1578
0,5	— 0,1087	0,1008	0,2094
0,6	— 0,2039	0,0672	0,2711
0,7	— 0,2991	0,0430	0,3421
0,8	— 0,3943	0,0272	0,4215
0,9	— 0,4896	0,0186	0,5082
1	— **0,5848**	0,0160	**0.6009**
II. Feld		+	—
1	+ **0,5410**	**0,6112**	0,0702
0,1	+ 0,4362	0,5102	0,0740
0,2	+ 0,3315	0,4180	0,0865
0,3	+ 0,2267	0,3361	0,1094
0,4	+ 0,1219	0,2657	0,1437
0,5	+ 0,0172	0,2073	0,1901
0,5164	0	**0,1990**	**0,1990**
0,6	— 0,0876	0,1613	0,2489
0,7	— 0,1924	0,1274	0,3198
0,8	— 0,2971	0,1049	0,4020
0,9	— 0,4019	0,0926	0,4945
1	— **0,5066**	0,0890	**0,5956**
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendruck.

$max\ D_0 = 0,3676\,g\lambda + 0,4313\,p\lambda.$

$max\ D_1 = 1,1259\,g\lambda + 1,2121\,p\lambda.$

$max\ D_2 = 1,0132\,g\lambda + 1,1912\,p\lambda.$

Mittlere Transversalkraft.

$\mathfrak{Q} = 0,2566\,g\lambda + 0,3518\,p\lambda.$

1 : 1,1 : 1,1 : 1.

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ / $\frac{\xi}{l}$	Moment		
		Einfluss v. g	Einfluss von p	
		M	max (+ M)	max (− M)
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,03047	0,00607	0,03654
0,2		— 0,05187	0,01213	0,06400
0,3		— 0,06421	0,01820	0,08241
0,4		— 0,06745	0,02427	0,09172
0,5		— 0,06164	0,03034	0,09198
0,6		— 0,04676	0,03640	0,08316
0,7		- 0,02281	0,04247	0,06528
0,7718		0	**0,04683**	**0,04683**
0,7962	0	+ 0,00888	0,04830	0,03947
0,8	0,1535	+ 0,01022	0,04858	0,03836
0,85	0,5574	+ 0,03013	0,05650	0,02637
0,9	0,7523	+ 0,05230	0,07161	0,01931
0,95	0,8913	+ 0,07675	0,09278	0,01603
1,0	1	**+ 0.10347**	**0,11872**	0,01525
II. Feld			+	—
0	0	**+ 0.10347**	**0,11872**	0,01525
0,05	0,1154	+ 0,07651	0,08988	0,01337
0,1	0,2651	+ 0,05229	0,06587	0,01358
0,15	0,4722	+ 0,03081	0,05875	0,02794
0,2	0,8300	+ 0,01206	0,04402	0,03196
0,2075	1	+ 0,00947	0,04278	0,03331
0,2369		0	**0,04278**	**0,04278**
0,3		— 0,01718	0,04278	0,05996
0,4		— 0,03544	0,04277	0,07821
0,5		— 0,04274	0,04276	0,08550
0,6		— 0,03905	0,04276	0,08181
0,7		— 0,02439	0,04275	0,06714
0,7889	1	— 0,00213	0,04274	0,04487
0,7959	0,8998	0	**0,04317**	**0,04317**
0,8	0,7900	+ 0,00124	0,04365	0,04241
0,85	0,4573	+ 0,01819	0,05139	0,03320
0,9	0,2577	+ 0,03786	0,06622	0,02836
0,95	0,1124	+ 0,06028	0,07006	0,00978
1,0	0	**+ 0 08544**	**0,11651**	0,03107
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $max(-M) = -0{,}0672\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}385\,l_1$,
II. „ $max(-M) = -0{,}0424\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}517\,l$.
Zufällige Last: I. Feld. $max(-M) = -0{,}0925\,p\lambda^2$ für $x = 0{,}453\,l_1$,
II. „ $max(-M) = -0{,}0852\,p\lambda^2$ „ $x = 0{,}517\,l$.

Mittleres Moment.

$$\mathfrak{M} = 0{,}04005\,g\lambda^2 + 0{,}06843\,p\lambda^2.$$

1 : 1,2 : 1,2 : 1.

$l_1 = \frac{10}{11}\lambda = 0{,}90909\,\lambda, \quad l = \frac{12}{11}\lambda = 1{,}09091\,\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l_1}$	*Transversalkraft*		
	Einfluss von g	*Einfluss von p*	
	Q	*max* (+ *Q*)	*max* (— *Q*)
I. Feld		+	—
0	+ **0,3431**	**0,4176**	0,0746
0,1	+ 0,2521	0,3324	0,0802
0,2	+ 0,1612	0,2583	0.0971
0,3	+ 0,0703	0,1954	0,1251
0,3774	0	**0,1541**	**0,1541**
0,4	— 0,0206	0,1431	0,1637
0,5	— 0,1115	0,1011	0,2126
0,6	— 0,2024	0,0687	0,2711
0,7	— 0,2933	0,0452	0,3385
0,8	— 0,3842	0,0298	0,4140
0,9	— 0,4751	0,0213	0,4965
1	— **0,5660**	0,0188	**0,5848**
II. Feld			—
0	+ **0,5484**	**0,6215**	0,0731
0,1	+ 0,4393	0,5160	0,0767
0.2	+ 0,3302	0,4198	0,0896
0,3	+ 0,2211	0,3341	0,1130
0,4	+ 0,1120	0.2603	0,1483
0,5	+ 0,0030	0,1991	0,1961
0,5027	0	**0,1976**	**0,1976**
0,6	— 0,1061	0,1508	0,2569
0,7	— 0,2152	0,1151	0,3303
0,8	— 0,3243	0,0914	0,4157
0,9	— 0,4334	0,0785	0,5119
1	+ 0,5425	0,0747	**0,6172**
	$\cdot\,g\lambda$	$\cdot\,p\lambda$	$\cdot\,g\lambda$

Stützendruck.

$max\ D_0 = 0{,}3431\,g\lambda + 0{,}4176\,p\lambda;$

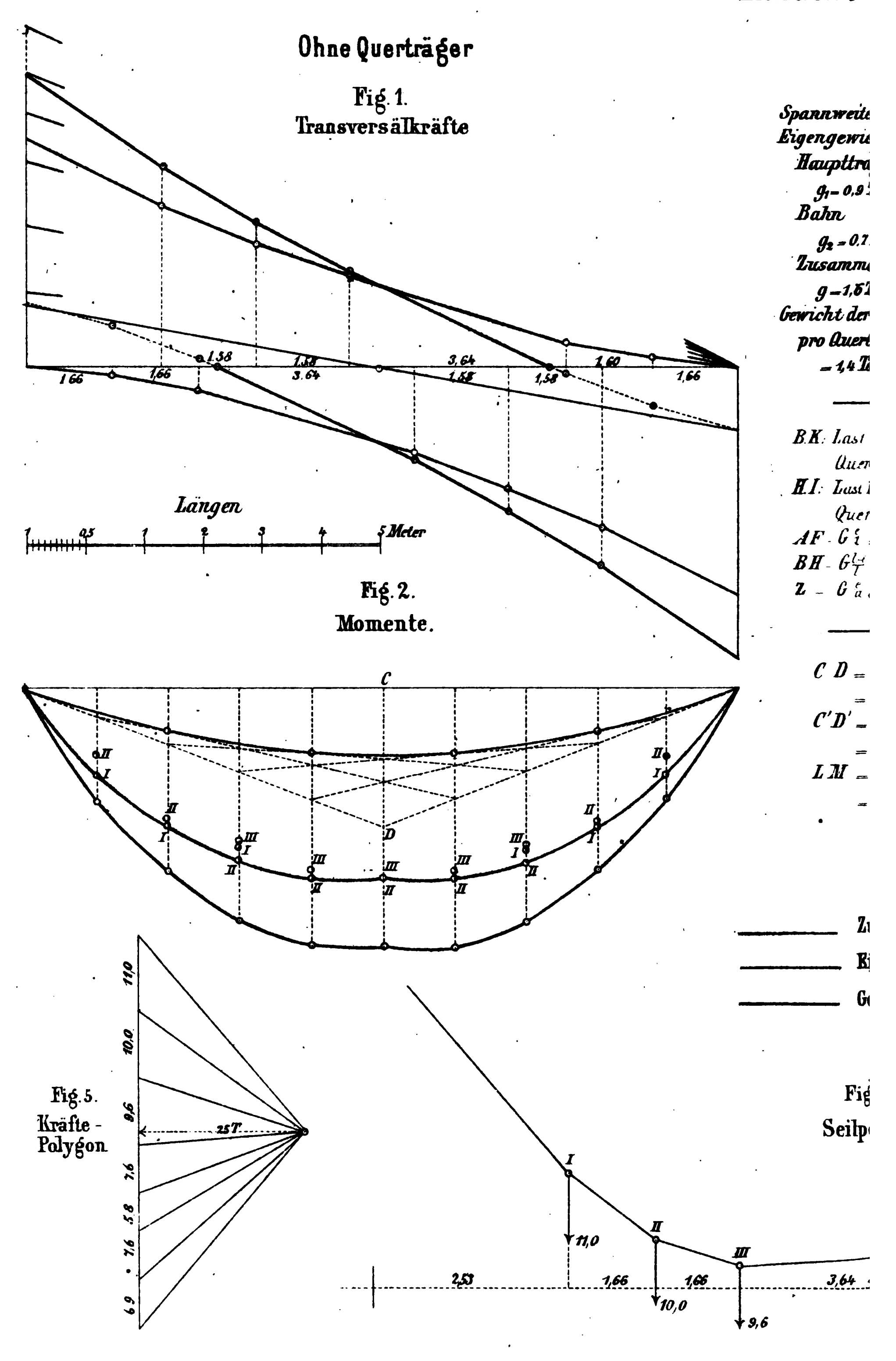
$max\ D_1 = 1{,}1144\,g\lambda + 1{,}2063\,p\lambda.$

$max\ D_2 = 1{,}0850\,g\lambda + 1{,}2344\,p\lambda.$

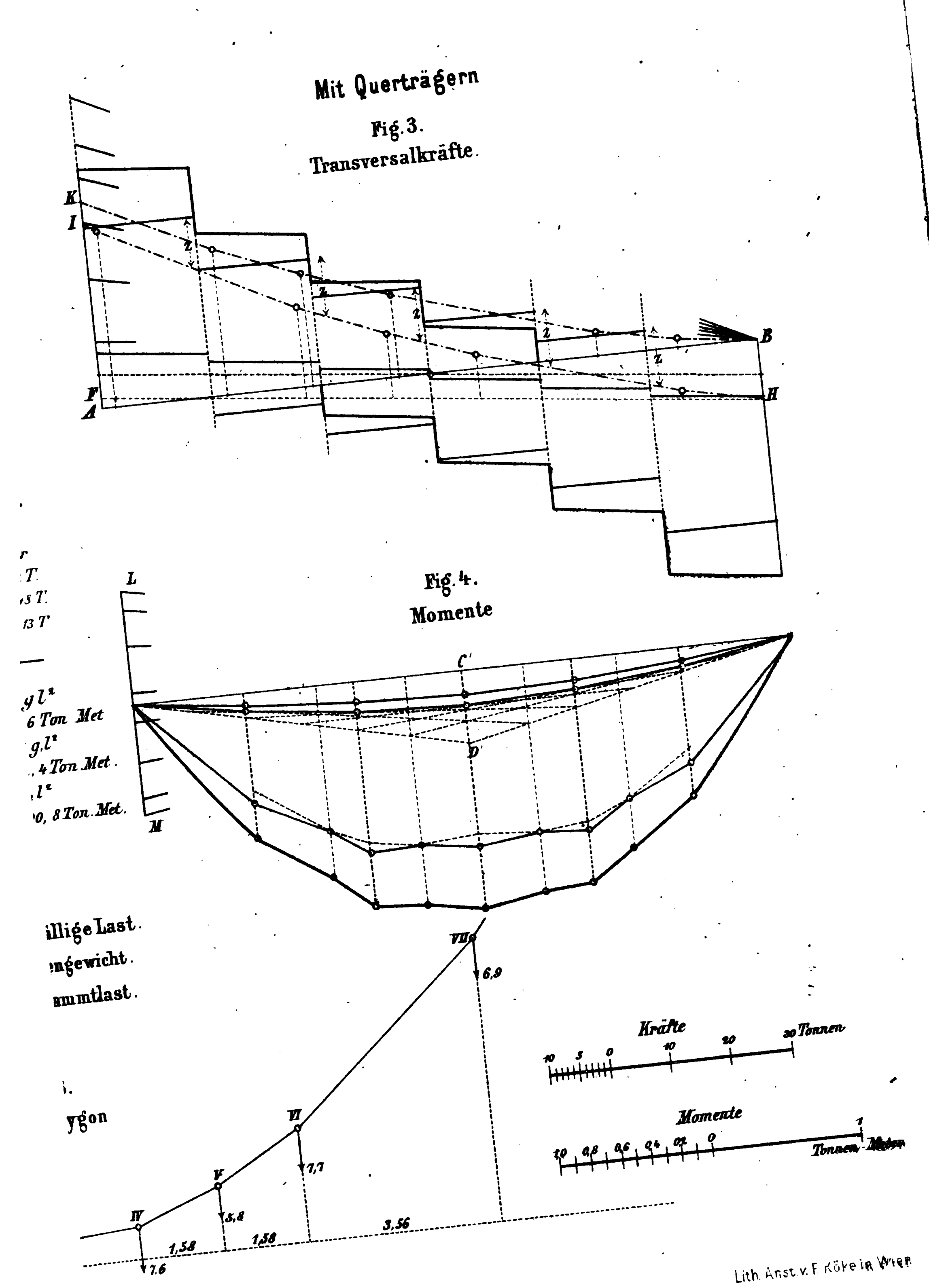
Mittlere Transversalkraft.

$\mathfrak{Q} = 0{,}2583\,g\lambda + 0{,}3509\,p\lambda.$

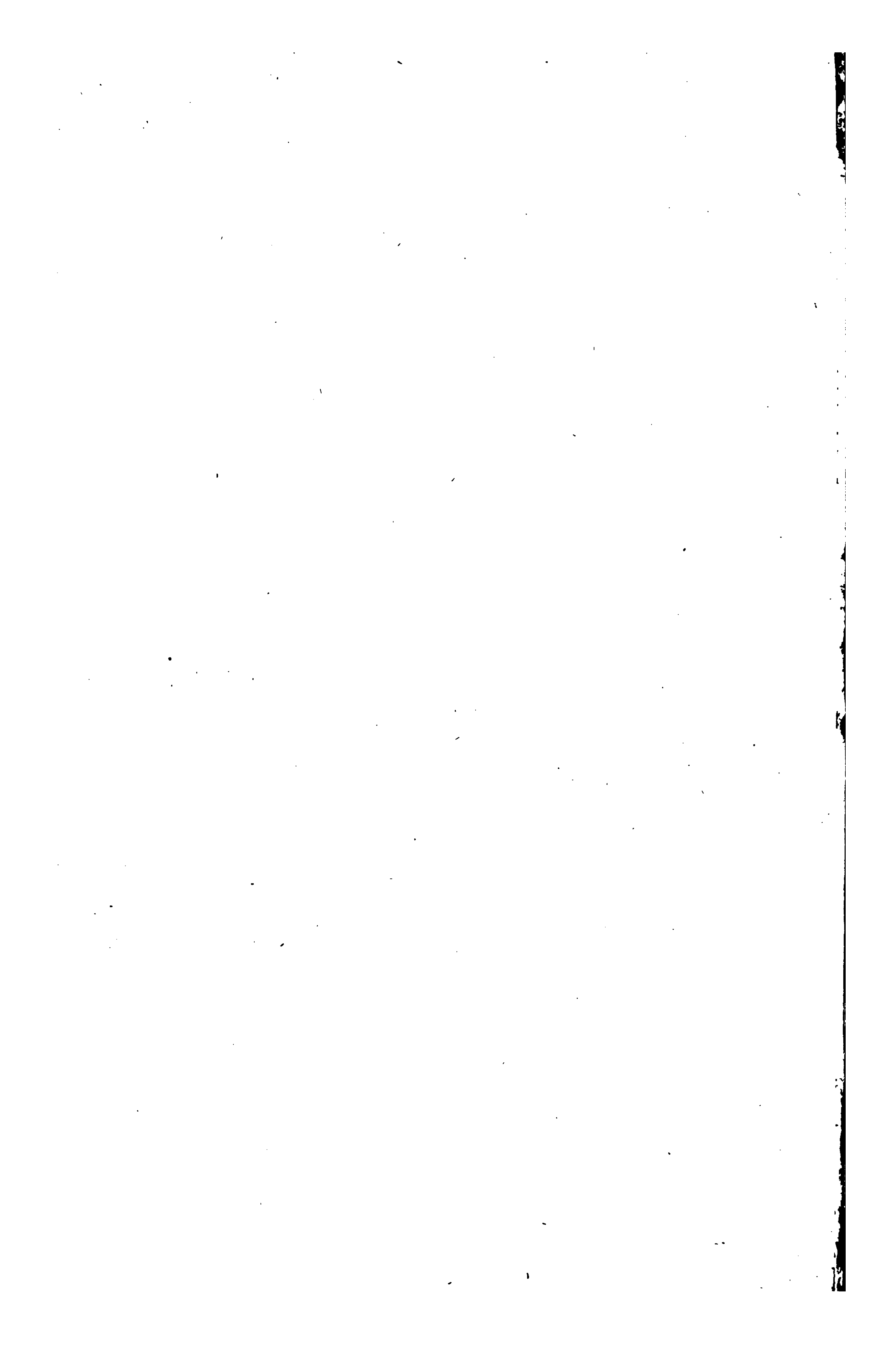




Winkler: Theorie der Brücken



Lith. Anst. v. F. Köke in Wien



Die Vorträge über Brückenbau erscheinen in 5 Theilen:

I. Theil. Theorie der Brücken.
II. Theil. Brücken im Allgemeinen. — Steinerne Brücken.
III. Theil. Hölzerne Brücken.
IV. Theil. Eiserne Brücken.
V. Theil. Herstellung der Brücken.

Der mit der vorliegenden Lieferung beginnende Theil über **Theorie der Brücken** zerfällt in folgende Hefte:

1. Heft. **Aeussere Kräfte gerader Träger.**
2. „ **Innere Kräfte gerader Träger.**
3. „ **Hänge- und Sprengwerks-Träger** (incl. Bogenträger und Gewölbe).

Jedem Hefte wird als Anhang ein Literaturbericht beigegeben.

Jedes Heft erscheint in 2 oder 3 Lieferungen von 5 bis 8 Bogen Text mit Holzschnitten und lithographirten Tafeln. Jedes Heft bildet für sich ein abgeschlossenes Ganze und wird einzeln abgegeben.

Bis jetzt wurde ausgegeben:

Eiserne Brücken. II. Heft. Gitterträger und Lager gerader Träger. Mit 333 Holzschnitten und 7 lithographirten Tafeln.
5 fl. 20 kr. = 3 Rthlr. 15 Ngr.

Von demselben Verfasser sind erschienen:

Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik. — Prag, bei H. Dominicus. 1868.

Vorträge über Eisenbahnbau, gehalten an verschiedenen deutschen polytechnischen Schulen, begonnen von E. Winkler. — Prag, bei H. Dominicus. — Bis jetzt ist erschienen:

I. Heft. Oberbau, von E. Winkler. II. Auflage, 1871.
II. „ Weichen und Kreuzungen, von E. Winkler. 1869. (II. Auflage wird demnächst ausgegeben.)
III. „ Schiebebühnen und Drehscheiben, von W. Fränkel. 1872.
V. „ Unterbau (I. Theil), von E. Winkler. 1870. (II. Auflage in Vorbereitung.)

Neue Theorie des Erddruckes, nebst einer Geschichte der Theorie des Erddruckes und der hierüber angestellten Versuche. Mit 47 Holzschnitten. Wien, R. v. Waldheim. 1872.



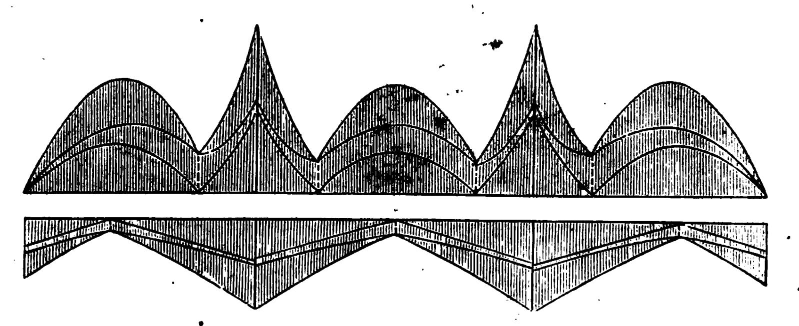
Der

BRÜCKENBAU.

Herausgegeben von

Dr. **E. Winkler,**

ord. Professor für Eisenbahn- und Brückenbau am k. k. Polytechnikum in Wien.



Theorie der Brücken.

I. Heft. Aeussere Kräfte gerader Träger.

Lieferung 2.

Mit 49 Holzschnitten und 5 lithogr. Tafeln.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1873.

96

Vorträge

über

BRÜCKENBAU

von

Dr. **E. Winkler,**

ord. Professor für Eisenbahn- und Brückenbau am k. k Polytechnicum in Wien.

Theorie der Brücken.

I. Heft.

Aeussere Kräfte gerader Träger.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1873.

THEORIE DER BRÜCKEN.

Aeussere Kräfte gerader Träger

von

Dr. **E. Winkler,**

ord. Professor für Eisenbahn- und Brückenbau am k. k. Polytechnicum in Wien.

Mit 123 Holzschnitten und 6 lithographirten Tafeln.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1873.

Holzschnitte aus der xylographischen Anstalt von C. Wlczek in Wien und der artistischen Anstalt von R. v. Waldheim in Wien.

Lithogr. Tafeln aus der lithographischen Anstalt von C. Köke in Wien und der artistischen Anstalt von R. v. Waldheim in Wien.

VORWORT.

Obwohl es Anfangs in der Absicht des Verfassers lag, zunächst den constructiven Theil des Brückenbaues im Drucke erscheinen zu lassen, weil sich seine Vorträge am Polytechnicum in Wien nur auf diesen Theil erstrecken sollen, so stellte sich doch bald heraus, dass hierbei eine so grosse Menge theoretischer Resultate nothwendig ist, dass die gleichzeitige Drucklegung des theoretischen Theiles zweckmässig erschien. Auch wurde der Verfasser hierzu von einigen Fachgenossen angeregt.

Bei der Behandlung des Stoffes sollen diejenigen Kenntnisse aus der Mathematik und Mechanik vorausgesetzt werden, welche von den Hörern der letzten Jahrgänge polytechnischer Hochschulen gefordert werden können.

Dem Verfasser erschien es rathsam, der analytischen und graphischen Behandlung in möglichst gleichem Maasse gerecht zu werden, da jede dieser Methoden ihre Berechtigung hat. Die graphische Darstellung der Resultate ist schon längst üblich, da sie den wesentlichen Nutzen einer grösseren Uebersichtlichkeit gegenüber den Formeln und tabellarischen Zusammenstellungen bietet und weil man sich hierdurch vor Rechnungsfehlern schützen kann, da jede Unregelmässigkeit sofort bemerklich wird. Während man aber früher entweder nur die Rechnungsresultate graphisch darstellte oder geometrische Constructionen aus den auf analytischem Wege gewonnenen Resultaten ableitete, ist in neuerer Zeit eine besondere Behandlungsweise der Statik, die sogenannte g r a p h i s c h e S t a t i k entstanden, welche die Gesetze auf rein geometrischem Wege entwickelt; hierdurch ist die Auffindung geometrischer Constructionen mehr dem Zufalle entrückt und für dieselbe eine wissenschaftliche Basis geschaffen. Immerhin aber wird hierdurch die analytische Behandlung nicht überflüssig, einestheils, weil die graphische Statik zur Zeit noch nicht so weit ausgebildet ist, dass sie in allen Fällen ausreicht, anderntheils, weil in einzelnen Fällen die analytische Methode einfacher und bequemer zum Ziele führt.

Die geometrische Construction hat gegen die Rechnung insbesondere die folgenden Vortheile: 1. Sie ist im Allgemeinen übersichtlicher, sie ist daher auch weniger ermüdend und sichert mehr gegen Fehler. 2. Etwa gemachte Fehler werden leichter entdeckt; Controlen, welche bei der

Rechnung fast immer nöthig sind, werden daher meist überflüssig. 3. Sie führt meist schneller zum Ziele, als die Rechnung; so z. B. braucht die Berechnung eines continuirlichen Trägers mit constantem Querschnitte etwa dreimal soviel Zeit, als die Construction. 4. Sie gestattet leichter eine Controle, falls eine solche nöthig ist, z. B. bei der Controle der Arbeiten der Studirenden durch die Lehrkräfte, bei der Prüfung von Projecten durch Behörden etc.

Dagegen lassen sich aber, abgesehen von den Fällen, in welchen bisher eine Construction noch nicht gefunden ist, gewisse Vortheile der Rechnung nicht verkennen: 1. Sie gestattet eine grössere Genauigkeit; im Allgemeinen ist zwar die Genauigkeit, welche die Construction bietet, eine für die Praxis ausreichende; handelt es sich aber um die Aufstellung von Zahlentabellen, welche nur einmal zu berechnen und dann für viele Arbeiten brauchbar sind, so wird man wohl die Rechnung der grösseren Genauigkeit wegen vorziehen. 2. Die Rechnung führt in manchen Fällen schneller zum Ziele, namentlich, wenn nur wenige Resultate nöthig sind, wenn es sich also z. B. um die Berechnung eines einfachen Trägers mit constantem Querschnitte handelt, wo nur die Kenntniss des Maximalmomentes nöthig ist. 3. Wenn man auf die Arbeit beim Lampenlichte angewiesen ist, so ist die Construction weniger genau, unbequemer und den Augen schädlicher. 4. Endlich kann auch die Individualität entscheidend sein, da mancher lieber rechnet, andere lieber zeichnen.

In gewissen Fällen kann es recht wohl auch zweckmässig sein, die graphische Methode mit der analytischen zu verbinden.

Das vorliegende Heft behandelt die äusseren Kräfte gerader Träger. Hierin bilden die Capitel II, III, VI, VIII, IX und X eine verbesserte Auflage einer im Jahrgange 1870 der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, sowie die Capitel XVI und XVII eine neue Auflage einer im Jahrgange 1872 der genannten Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung.

Der Einfluss der Geschwindigkeit der Verkehrslast, welcher wohl in dieses Heft hätte aufgenommen werden können, soll im nächsten Hefte, welches die inneren Kräfte gerader Träger behandeln wird, besprochen werden.

Schliesslich fühle ich mich verpflichtet, dem Herrn Verleger für die vortheilhafte Ausstattung des Buches, sowie Herrn Ingenieur Prandstetter und Herrn Assistent v. Köszeghy für die Durchsicht der Correcturen und Richtigstellung der Tabellen meinen Dank auszusprechen. Die geehrten Fachgenossen aber bitte ich um eine wohlwollende Beurtheilung.

Wien, im August 1872.

E. Winkler.

INHALT.

Aeussere Kräfte gerader Träger.

Berichtigungen.

Seite 42 Zeile 2 von unten: in der grossen Parenthese fehlt das Zeichen $+$.

„ 55 „ 6 „ oben: $2l - \xi$ statt $2 - \xi$.

„ 56 Formel 19: $(l^2 - \xi^2)^2$ statt $(l^2 - \xi^2)$.

„ 58: in der ersten der Formeln 22 fehlt auf der rechten Seite das Zeichen $+$.

„ 69 Zeile 15 von oben: §. 48 statt §. 47.

„ 79 „ 10 „ unten: der letzte Theil der Formel soll heissen $0{,}6328 \frac{\xi_1^2}{l^2}\Big] \frac{x}{l_1} p \lambda^2$.

„ 85 „ 4 „ oben: $0{,}07080$ statt $0{,}07666$.

1 : 1,2 : 1,2 : 1.

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ / $\frac{\xi}{l}$	Moment: Einfluss v. g — M	Einfluss von p — max (+ M)	Einfluss von p — max (− M)
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,02706	0,00678	0,03383
0,2		— 0,04585	0,01356	0,05940
0,3		— 0,05637	0,02033	0,07671
0,4		— 0,05863	0,02711	0,08574
0,5		— 0,05263	0,03389	0,08652
0,6		— 0,03836	0,04067	0,07903
0,7		— 0,01583	0,04745	0,06328
0,7547		0	**0,05114**	**0,05114**
0,8		+ 0,01497	0,05422	0,03926
0,80307	0	+ 0,01604	0,05443	0,03839
0,85	0,5295	+ 0,03346	0,06100	0,02754
0,9	0,7395	+ 0,05403	0,07364	0,01961
0,95	0,8862	+ 0,07666	0,09408	0,01742
1,0	1	+ **0,10135**	**0 11844**	0,01709
II. Feld			+	—
0	0	+ **0,10135**	**0,11844**	0,01709
0,05	0,1102	+ 0,07292	0,08761	0,01469
0,1	0,2521	+ 0,04747	0,06355	0,01608
0,15	0,4466	+ 0,02499	0,05547	0,03048
0,2	0,7608	+ 0,00549	0,03809	0,03260
0,2143	1	+ 0,00047	0,03689	0,03642
0,2157		0	**0,03698**	**0,03698**
0,3		— 0,02459	0,03822	0,06281
0,4		— 0,04277	0,03976	0,08253
0,5		— 0,04905	0,04131	0,09036
0,6		— 0,04343	0,04285	0,08628
0,7		— 0,02590	0,04440	0,07030
0,7885		— 0,00046	0,04577	0,04623
0,7898	1	0	**0,04590**	**0,04590**
0,8	0,7877	+ 0,00352	0,04680	0,04328
0,85	0,4577	+ 0,02270	0,05512	0,03242
0,9	0,2579	+ 0,04485	0,07109	0,02624
0,95	0,1125	+ 0,06998	0,09463	0,02465
1,0	0	+ **0,09809**	**0,1252 7**	0,02718
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $max\,(-M) = -\,0{,}0590\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}377\,l_1$,
II. „ $max\,(-M) = -\,0{,}0491\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}501\,l$.
Zufällige Last: I. Feld. $max\,(-M) = -\,0{,}0872\,g\lambda^2$ für $x = 0{,}401\,l_1$,
II. „ $max\,(-M) = -\,0{,}0895\,g\lambda^2$ „ $x = 0{,}514\,l$.

Mittleres Moment.

$$\mathfrak{M} = 0{,}03941\,g\lambda^2 + 0{,}06928\,p\lambda^2.$$

1 : 1,3 : 1,3 : 1.

$$l_1 = \frac{20}{23}\lambda = 0,86957\lambda, \quad l = \frac{26}{23}\lambda = 1,13044\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von p	
	Q	max (+ Q)	max (— Q)
I. Feld		+	—
0	+ **0,3193**	**0,4053**	0,0860
0,1	+ 0,2323	0,3237	0,0914
0,2	+ 0,1454	0,2528	0,1074
0,3	+ 0,0584	0,1924	0,1340
0,3672	0	**0,1588**	**0,1588**
0,4	— 0,0285	0,1421	0,1707
0,5	— 0,1155	0,1016	0,2171
0,6	— 0,2025	0,0703	0,2728
0,7	— 0,2894	0,0475	0,3369
0,8	— 0,3764	0,0324	0,4088
0,9	— 0,4633	0,0242	0,4875
1	— 0,5503	0,0217	**0,5720**
II. Feld		+	—
1	+ **0,5572**	**0,6329**	0,0757
0,1	+ 0,4441	0,5236	0,0795
0,2	+ 0,3311	0,4235	0,0924
0,3	+ 0,2181	0,3342	0,1162
0,4	+ 0,1050	0,2573	0,1523
0,4929	0	**0,1981**	**0,1981**
0,5	— 0,0080	0,1934	0,2015
0,6	— 0,1211	0,1430	0,2641
0,7	— 0,2341	0,1059	0,3400
0,8	— 0,3472	0,0810	0,4282
0,9	— 0,4602	0,0675	0,5277
1	— **0,5733**	0,0635	**0,6368**
	$\cdot g\lambda$	$\cdot p\lambda$	$\cdot p\lambda$

Stützendruck.

$$\max D_0 = 0,3193\, g\lambda + 0,4053\, p\lambda.$$
$$\max D_1 = 1,1075\, g\lambda + 1,2049\, p\lambda.$$
$$\max D_2 = 1,1466\, g\lambda + 1,2736\, p\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft.

$$\mathfrak{Q} = 0,2677\, g\lambda + 0,3538\, p\lambda.$$

1 : 1,3 : 1,3 : 1.

$\frac{x}{l_1}$, $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$, $\frac{\xi}{l}$	*Moment* — *Einfluss v. g* — *M*	*Einfluss von p* — *max* (+ *M*)	*max* (− *M*)
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,02398	0,00748	0,03146
0,2		— 0,04041	0,01496	0,05537
0,3		— 0,04927	0,02244	0,07171
0,4		— 0,05057	0,02992	0,08049
0,5		— 0,04430	0,03741	0,08171
0,6		— 0,03048	0,04489	0,07537
0,7		— 0,00909	0,05237	0,06146
0,7344		0	**0,05494**	**0,05494**
0,8		+ 0,01985	0,05985	0,04000
0,8095	0	+ 0,02301	0,06056	0,03756
0,85	0,5000	+ 0,03716	0,06595	0,02979
0,9	0,6872	+ 0,05636	0,07835	0,02199
0,95	0,8811	+ 0,07745	0,09550	0,01905
1,0	1	+ **0,10043**	**0,11928**	0,01885
II. Feld			+	—
0	0	+ **0,10043**	**0,11928**	0,01885
0,05	0,1058	+ 0,07053	0,08680	0,01627
0,1	0,2416	+ 0,04384	0,06122	0,01738
0,15	0,2456	+ 0,02033	0,05338	0,03305
0,2	0,7158	0	**0,03529**	**0,03529**
0,2203	1	— 0,00732	0,03204	0,03936
0,3		— 0,03101	0,03437	0,06538
0,4		— 0,04927	0,03728	0,08655
0,5		— 0,05475	0,04019	0,09494
0,6		— 0,04744	0,04311	0,09055
0,7		— 0,02738	0,04603	0,07341
0,7857		0	**0,04844**	**0,04844**
0,7880	1	+ 0,00084	0,04858	0,04774
0,8	0,7858	+ 0,00548	0,04973	0,04423
0,85	0,4580	+ 0,02671	0,05750	0,03079
0,9	0,2581	+ 0,05111	0,07559	0,02448
0,95	0,1125	+ 0,07871	0,10082	0,02211
1,0	0	+ **0,10952**	**0,13362**	0,02410
		$\cdot g\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$	$\cdot p\lambda^2$

Absolutes negatives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. $max(-M) = -0,0510\,g\lambda^2$ für $x = 0,367\,l_1$,
II. „ $max(-M) = -0,0543\,g\lambda^2$ „ $x = 0,493\,l$.

Zufällige Last: I. Feld. $max(-M) = -0,0959\,p\lambda^2$ für $x = 0,413\,l_1$,
II. „ $max(-M) = -0,0963\,p\lambda^2$ „ $x = 0,513\,l$.

Mittleres Moment.

$$\mathfrak{M} = 0,03947\,g\lambda^2 + 0,07107\,p\lambda^2.$$

Beispielsweise nehmen wir an, dass $\lambda = 0{,}05\,l$, $g = 0{,}3\,q$, $p = 0{,}7\,q$ sei. Alsdann ergiebt sich der Druck als positiv für folgende Belastungsfälle:

Nr.	*I. Feld*	*III. Feld*
1	*links*, $\xi < 0{,}232\,l$	*nicht*
2	*rechts*, $\xi > 0{,}819\,l$	*nicht*
3	*links*, $\xi > 0{,}707\,l$	*total*
4	*rechts*, $\xi < 0{,}415\,l$	*total*

Die Belastungsweise des Zwischenfeldes ist hierbei ziemlich gleichgültig.

§. 66. Transversalkräfte.

Erstes Feld.

1. **Eigengewicht.** *a)* Ruht der Träger auf allen Stützpunkten auf, so ist $2M_1(l+\lambda) + M_2\lambda = \frac{1}{4}g(l^3+\lambda^3)$ und $M_1 = M_2$, mithin, wenn wir $\lambda = ml$ setzen,

$$M_1 = \frac{1}{4}\,\frac{1+m^3}{2+3m}\,gl^2.$$

Es wird nun $M_1 = -Q'l + \frac{1}{2}gl^2$, $Q' = \frac{1}{2}gl - \frac{M_1}{l}$, d. i.

$$Q' = \frac{3+6m-m^3}{4(2+3m)}\,gl.$$

Für $m = 0{,}05$, $g = 0{,}3\,q$ wird hiernach $Q' = 0{,}3837\,gl = 0{,}1151\,ql$ und allgemein $Q = Q' - gx$, oder

$$a. \quad Q = \left(0{,}1151 - 0{,}3\,\frac{x}{l}\right) q\,l.$$

b) Ruht dagegen der Träger auf der rechten Mittelstütze C nicht auf, so wird $2M_1(2l+\lambda) = \frac{1}{4}g\,[l^3 + (l+\lambda)^3]$, daher

$$M_1 = \frac{1}{8}\,\frac{1+(1+m)^3}{2+m}\,gl^2$$

und nun $Q' = \frac{1}{2}gl - \frac{M_1}{l}$, d. i.

$$Q' = \frac{6+m-3m^2-m^3}{8(2+m)}\,gl.$$

Für $m = 0{,}05$, $g = 0{,}3\,q$ wird $Q' = 0{,}3684\,gl = 0{,}1105\,ql$ und allgemein $Q = Q' - gx$ oder

$$b. \quad Q = \left(0{,}1105 - 0{,}3\,\frac{x}{l}\right) q\,l.$$

c) Ruht endlich der Träger auf der linken Mittelstütze nicht auf, so wird $2M_2(2l+\lambda) = \frac{1}{4}g[l^3 + (l+\lambda)^3]$, also M_2 ebenso gross als im vorigen Falle M_1. Daher wird nun $Q' = \frac{1}{8}g(l+\lambda) - \frac{M_1}{l+\lambda}$, d. i.

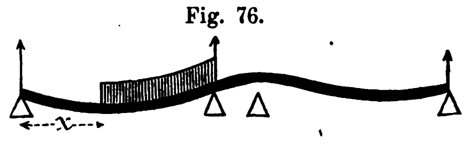
$$Q' = \frac{6 + 19m + 15m^2 + 3m^3}{8(1+m)(2+m)} gl.$$

Für $m = 0{,}05$, $g = 0{,}3q$ wird $Q' = 0{,}3997\,gl = 0{,}1199\,ql$, also allgemein

$$c.\quad Q = \left(0{,}1199 - 0{,}3\frac{x}{l}\right)ql.$$

2. **Zufällige Last.** *a*) Positives Maximum. Q wird im ersten Felde zum positiven Maximum, wenn der rechte Theil dieses Feldes vom fraglichen Querschnitte aus belastet ist. Das Zwischenfeld darf nicht belastet sein, da die Belastung desselben den Stützendruck D_0 und hiermit $max\,(+Q)$ vermindern würde. Das III. Feld aber wird entweder belastet oder nicht belastet sein müssen, je nachdem ein Aufruhen oder ein Nichtaufruhen auf der rechten Mittelstütze B angenommen wird. Ruht zunächst der Träger auf dieser Stütze nicht auf, ist also auch das III. Feld nicht belastet (Fig. 76), so ist $2M_1(2l+\lambda) = \mathfrak{R}_1''l$, also

Fig. 76.



$$M_1 = \frac{\mathfrak{R}_1''l}{2(2l+\lambda)}.$$

Es wird nun $Q_1' = \frac{1}{8}p\frac{l-x^2}{l} - \frac{M_1}{l}$, d. i.

$$max\,(+Q) = Q_1' = \frac{(l-x)^2}{2l^2}pl - \frac{\mathfrak{R}_1''}{2(2l+\lambda)}.$$

Für unser Beispiel, wo $\lambda = 0{,}05l$ ist, wird

$$max\,(+Q) = 0{,}5\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 pl - 0{,}2439\frac{\mathfrak{R}_1''}{l}.$$

Setzen wir für $\mathfrak{R}_1''$ den Ausdruck 19 (Seite 56), so ergiebt sich

$$max\,(+Q) = \left(1-\frac{x}{l}\right)^2\left[0{,}5 - 0{,}06098\left(1+\frac{x}{l}\right)^2\right]pl$$

$$= \left(1-\frac{x}{l}\right)^2\left[0{,}35 - 0{,}04269\left(1+\frac{x}{l}\right)^2\right]ql.$$

Mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach Formel *b* wird

$$d.\quad max\,(+Q) = \left[0{,}4178 - \frac{x}{l} + 0{,}4354\frac{x^2}{l^2} - 0{,}0427\frac{x^4}{l^4}\right]ql.$$

Nach dem vorigen §. gilt diese Regel nur, so lange $x < 0{,}819\,l$ ist, weil für grössere x ein Aufruhen auf beiden Mittelstützen stattfinden würde. Indess geht $max\,(+Q)$ bereits für $x = 0{,}544\,l$ in Null über, so dass für grössere x $max\,(+Q)$ keine Bedeutung hat.

Findet nun ferner ein Aufruhen auf beiden Mittelstützen statt und ist also eine Belastung des III. Feldes anzunehmen, so wird $2M_1(l+\lambda) + M_2\lambda = \mathfrak{N}_1'$ und $M_1\lambda + 2M_2(l+\lambda) = \frac{1}{4}pl^3$ und hiernach

$$M_1 = \frac{8\,\mathfrak{N}_1'(l+\lambda) - pl^2\lambda}{4(2l+\lambda)(2l+3\lambda)}\,l$$

und nun wird $max(+Q) = Q_1' = \frac{(l-x)^2}{2l^2}pl - \frac{M_1}{l}$. Für unser Beispiel wird $M_1 = 0{,}47646\,\mathfrak{N}_1'' - 0{,}00284\,pl$, daher

$$max(+Q) = \left[0{,}5\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 + 0{,}00284\right]pl - 0{,}47646\,\frac{\mathfrak{N}_1'}{l}$$

$$= \left(0{,}3837 - \frac{x}{l} + 0{,}7382\,\frac{x^2}{l^2} - 0{,}1191\,\frac{x^4}{l^4}\right)pl$$

$$= \left(0{,}2686 - 0{,}7\,\frac{x}{l} + 0{,}5167\,\frac{x^2}{l^2} - 0{,}0834\,\frac{x^4}{l^4}\right)ql$$

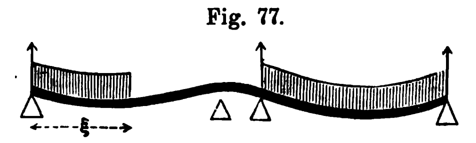
und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach Formel a:

$$e.\quad max(+Q) = \left(0{,}3837 - \frac{x}{l} + 0{,}5167\,\frac{x^2}{l^2} - 0{,}0834\,\frac{x^4}{l^4}\right)ql.$$

Diese Formel gilt nur, so lange $x < 0{,}415\,l$ ist. Indess ergiebt sich hiernach $max(+Q)$ stets kleiner, als für die vorige Belastungsweise.

b) Negatives Maximum. Für das negative Maximum von Q muss der linke Theil des ersten Feldes vom fraglichen Querschnitte aus belastet sein. Wir setzen zunächst voraus, dass der Träger nur auf der rechten Mittelstütze C aufruhe. Alsdann muss das III. Feld belastet sein (Fig. 77). Betrachtet man den Träger als nur aus zwei Feldern bestehend, so wird $2M_2(2l+\lambda) = \mathfrak{N}''(l+\lambda) + \frac{1}{4}pl^3$, also

Fig. 77.



$$M_2 = \frac{4\mathfrak{N}''(l+\lambda) + pl^3}{8(2l+\lambda)}.$$

Ferner ist nun $M_2 = -Q_1'(l+\lambda) + px(l+\lambda-\frac{1}{2}x)$, also $Q_1' = \frac{px(2l+2\lambda-x)}{2(l+\lambda)} - \frac{M_2}{l+\lambda}$ und $max(-Q) = Q_1' - px$, d. i.

$$max(-Q) = -\frac{px^2}{2(l+\lambda)} - \frac{4\mathfrak{N}''(l+\lambda) + pl^3}{8(l+\lambda)(2l+\lambda)}.$$

Für unser Beispiel wird

$$max(-Q) = -\left(0{,}0581 + 0{,}4762\,\frac{x^2}{l^2}\right) - 0{,}2439\,\frac{\mathfrak{N}''}{l}.$$

Setzen wir nach Formel 17 (Seite 55) $\mathfrak{R}'' = \frac{px^2[2(l+\lambda)^2 - x^2]}{4(l+\lambda)^3}$, so wird

$$max\,(-Q) = -\left[0{,}0581 + 0{,}5981\frac{x^2}{l^2} - 0{,}0553\frac{x^4}{l^4}\right]pl$$

$$= -\left[0{,}0406 + 0{,}4187\frac{x^2}{l^2} - 0{,}0387\frac{x^4}{l^4}\right]ql$$

und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach Formel c:

$$f.\quad max\,(-Q) = \left[0{,}0793 - 0{,}3\frac{x}{l} - 0{,}4187\frac{x^2}{l^2} + 0{,}0387\frac{x^4}{l^4}\right]ql.$$

Diese Formel ist nur anzuwenden, so lange $x < 0{,}707\,l$ ist, da für grössere x ein Aufruhen auf beiden Stützen stattfinden würde. Für x, welche $< 0{,}205\,l$ sind, wird $max\,(-Q)$ nicht mehr negativ.

Wenn endlich der Träger nur auf der linken Mittelstütze aufruht, so müsste das II. und III. Feld belastet sein, indess nur so weit, dass die rechte Mittelstütze eben berührt wird, da für noch weitere Belastung nach §. 47 Q wieder vermindert werden würde. Wenn man nun aber ein Aufruhen auf beiden Mittelstützen annimmt, wobei das Berühren der rechten Mittelstütze als Grenzfall inbegriffen ist, so ergiebt sich M_1 in Folge der Belastung des III. Feldes zu $-\frac{\mathfrak{R}_3' l\lambda}{(2l+\lambda)(2l+3\lambda)}$, d. i. für unser Beispiel zu $-0{,}0113\,\mathfrak{R}_3'$, d. i. so gering, dass man zur Vereinfachung der Rechnung eine totale Belastung des III. Feldes annehmen kann (Fig. 78). Alsdann ergiebt sich

Fig. 78.

$$M_1 = \frac{8\,\mathfrak{R}_1' l(l+\lambda) - p\lambda(l^3 - 2l\lambda^2 - \lambda^3)}{4(2l+\lambda)(2l+3\lambda)}.$$

Ferner wird nun $M_1 = -Q_1' l + px(l - \frac{1}{2}x)$, also $Q_1' = \frac{px(2l-x)}{2l} - \frac{M_1}{l}$ und $max\,(-Q) = Q_1' - px$, d. i.

$$max\,(-Q) = -\frac{px^2}{2l} - \frac{M_1}{l}.$$

Für unser Beispiel wird $M_1 = 0{,}47646\,\mathfrak{R}_1'' - 0{,}00282\,pl^2$, also

$$max\,(-Q) = \left(0{,}00282 - 0{,}5\frac{x^2}{l^2}\right)pl - 0{,}47646\frac{\mathfrak{R}_1''}{l}$$

$$= \left(0{,}0028 - 0{,}7382\frac{x^2}{l^2} + 0{,}1191\frac{x^4}{l^4}\right)pl$$

$$= \left(0{,}0020 - 0{,}5168\frac{x^2}{l^2} + 0{,}0834\frac{x^4}{l^4}\right)ql$$

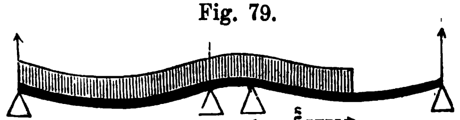
und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach Formel a:

$$g.\quad max\,(-Q) = \left(0{,}1171 - 0{,}3\,\frac{x}{l} - 0{,}5168\,\frac{x^2}{l^2} + 0{,}0834\,\frac{x^4}{l^4}\right) q\,l.$$

Diese Formel ist nur gültig, so lange $x > 0{,}707\,l$ ist. Das absolute Maximum von $-Q$ ergiebt sich hiernach zu $0{,}6163\,gl$, während es sich nach der genaueren gefährlichsten Belastungsweise zu $0{,}6165\,ql$, also äusserst wenig grösser ergiebt.

Zwischenfeld. Der Symmetrie wegen haben wir hier nur die positiven Transversalkräfte zu untersuchen. Bei Bestimmung der Momente können wir von einer veränderlichen Belastung des Feldes seiner Kleinheit wegen absehen. Nimmt man zunächst nur ein Aufruhen auf der linken Mittelstütze an, so muss das I. Feld total belastet sein, das II. und III. Feld aber nur so weit, dass die rechte Stütze eben berührt wird (Fig. 79); eine noch weitere Belastung würde $+Q$ im II. Felde nach §. 47 wieder vermindern.

Fig. 79.



Betrachten wir den Träger als aus 3 Feldern bestehend, so ist $2M_1\,(l+\lambda) + M_2\,\lambda = \frac{1}{4}\,ql^3 + \frac{1}{4}\,q\lambda^3$, $M_1\,\lambda + 2M_2\,(l+\lambda) = \frac{1}{4}\,q\lambda^3 + \frac{1}{4}\,gl^3 + \mathfrak{N}_3'\,l$. Hieraus folgt:

$$\left\{\begin{aligned} M_1 &= \frac{q\,(2l^4 + 2l^3\lambda + 2l\lambda^3 + \lambda^4) - gl^3\lambda - 4\mathfrak{N}_3'\,l\lambda}{4\,(2l+\lambda)\,(2l+3\lambda)}, \\ M_2 &= \frac{q\lambda\,(2l\lambda^2 - l^3 + \lambda^3) + 2gl^3\,(l+\lambda) + 8\mathfrak{N}_3'\,l\,(l+\lambda)}{4\,(2l+\lambda)\,(2l+3\lambda)}. \end{aligned}\right.$$

Für unser Beispiel ergiebt sich:

$$M_1 = 0{,}11828\,ql^2 - 0{,}01134\,\mathfrak{N}_3',$$
$$M_2 = 0{,}03291\,ql^2 + 0{,}47646\,\mathfrak{N}_3'.$$

Es wird nun $Q_2' = \frac{1}{2}\,q\lambda + \frac{M_1 - M_2}{\lambda}$, $Q_2'' = -\frac{1}{2}\,q\lambda + \frac{M_1 - M_2}{\lambda}$, $Q_3' = \frac{1}{2}\,gl + \frac{p\xi\,(2l-\xi)}{2l} + \frac{M_2}{l}$ und der Stützendruck auf die rechte Mittelstütze $D_2 = -Q_2'' + Q_3'$, d. i.

$$D_2 = \frac{1}{2}\,g\,(l+\lambda) + \frac{p\xi\,(2l-\xi)}{2l} + \frac{M_2}{l} - \frac{M_1 - M_2}{\lambda}.$$

Die Einsetzung der Werthe von M_1 und M_2 giebt für unser Beispiel:

$$D_2 = -\left(1{,}5150 - 0{,}7\,\frac{\xi}{l} + 0{,}35\,\frac{\xi^2}{l^2}\right) ql + 10{,}2325\,\frac{\mathfrak{N}_3'}{l}$$
$$= -\left(1{,}5150 - 0{,}7\,\frac{\xi}{l} - 6{,}8128\,\frac{\xi^2}{l^2} + 7{,}1628\,\frac{\xi^3}{l^3} - 1{,}7907\,\frac{\xi^4}{l^4}\right) ql.$$

Hiernach ergiebt sich für $\xi = 0{,}55\,l : D_2 = -0{,}0969\,q\,l$ und für $\xi = 0{,}60\,l : D_2 = +0{,}0425\,q\,l$, woraus durch Interpolation folgt, dass für $\xi = 0{,}585\,l$ $D_2 = 0$ wird. Für diese Belastung wird $\mathfrak{N}_3' = 0{,}17130\,p\,l^2 = 0{,}11991\,q\,l^2$, $M_1 = 0{,}11692\,q\,l^2$, $M_2 = 0{,}09004\,q\,l^2$. Es wird nun

$$Q_2' = \frac{1}{4}\,g\,\lambda + \frac{M_1 - M_2}{\lambda},$$

d. i. für unser Beispiel $Q_2' = (0{,}025 + 0{,}5376)\,q\,l = 0{,}5626\,q\,l$. Für andere Querschnitte des Zwischenfeldes wird sich für die gefährlichste Belastungsweise Q_2' sehr wenig ändern; wir können daher $max\,(+\,Q) = Q_2' - g\,x$ setzen, d. i. für unser Beispiel

$$h. \quad max\,(+\,Q) = \left(0{,}5626 - 0{,}3\,\frac{x}{l}\right)q\,l.$$

In folgender Tabelle sind die Maximal-Transversalkräfte für verschiedene Querschnitte zusammengestellt:

x	$max(+Q)$	$max(-Q)$	x	$max(+Q)$	$max(-Q)$
I. Feld	+	—	0,7	—	0,3266
0	0,4178	—	0,8	—	0,4195
0,1	0,3222	—	0,9	—	0,5168
0,2	0,2452	—	1	—	0,6163
0,3	0,1566	0,0481	*II. Feld*	+	—
0,384	0,0975	0,0975	0	0,5626	0,5476
0,4	0,0864	0,1068	0,025	0,5551	0,5551
0,5	0,0240	0,1730	0,05	0,5476	0,5626
0,6	—	0,2465			
$.\,l$	$.\,q\,l$	$.\,q\,l$	$.\,l$	$.\,q\,l$	$.\,q\,l$

Hiernach ist

$$Max\,(+\,Q) = 0{,}4178\,q\,l, \quad Max\,(-\,Q) = 0{,}6163\,q\,l,$$
$$Q \text{ im Mittel} = 0{,}3074\,q\,l,$$

wobei sich die Maxima nur auf die äusseren Felder, das Mittel auf alle Felder beziehen. Wendet man bei derselben Totallänge nur ein Mittellager an, so ergiebt sich nach §. 57:

$$Max\,(+\,Q) = 0{,}4292\,q\,l, \quad Max\,(-\,Q) = 0{,}6406\,q\,l,$$
$$Q \text{ im Mittel} = 0{,}3175\,q\,l,$$

wonach die Transversalkräfte durchschnittlich um *3,2 Procent* grösser ausfallen. Berechnet man die Transversalkräfte so, als wenn das Zwischenfeld gar nicht vorhanden wäre, so wird nach §. 57:

$$max\,(+\,Q) = 0{,}4188\,q\,l, \quad max\,(-\,Q) = 0{,}6250\,q\,l,$$
$$Q \text{ im Mittel} = 0{,}3098\,q\,l,$$

welche Werthe nur wenig von den wirklichen abweichen.

§. 67. Momente.

Erstes Feld.

1. **Eigengewicht.** Die Werthe für Q_1 wurden bereits im vorigen §. entwickelt. Wir haben nun

$$M = -\,Q_1'x + \tfrac{1}{2}\,g\,x^2.$$

Für das von uns behandelte Beispiel ($\lambda = 0{,}05\,l$, $g = 0{,}3\,q$) ergiebt sich:

Aufruhen auf beiden Mittelstützen:

$$i. \quad M = -\left(0{,}1151 - 0{,}15\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,q\,l^2.$$

Aufruhen auf der linken Mittelstütze:

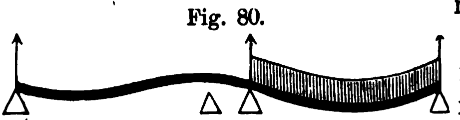
$$k. \quad M = -\left(0{,}1105 - 0{,}15\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,q\,l^2.$$

Aufruhen auf der rechten Mittelstütze:

$$l. \quad M = -\left(0{,}1199 - 0{,}15\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,q\,l^2.$$

2. **Zufällige Last.** *a*) Positive Momente. I. Theil. Ruht der Träger auf beiden Mittelstützen auf, so müsste nur das Zwischenfeld belastet sein, wodurch indess so kleine Momente entstehen, dass dieselben nicht in Berücksichtigung kommen. Ruht der Träger nur auf der rechten Mittelstütze auf, so müsste nur das ganze III. Feld belastet sein (Fig. 80).

Fig. 80.



Für diese Belastung wird $2M_2\,(2l + \lambda) = \frac{1}{4}\,p\,l^2$, also $M_2 = \frac{p\,l^2}{8\,(2l+\lambda)}$ und $Q_1' = -\,\frac{M_2}{l+\lambda}$, mithin $max\,(+\,M) = -\,Q_1'x = +\,\frac{M_2\,x}{l+\lambda}$, d. i.

$$max\,(+\,M) = +\,\frac{p\,l^2\,x}{8\,(l+\lambda)\,(2l+\lambda)}.$$

Für unser Beispiel ($\lambda = 0{,}05\,l$) wird hiernach

$$max\,(+\,M) = +\,0{,}05087\,\frac{x}{l}\,p\,l^2 = +\,0{,}03561\,\frac{x}{l}\,q\,l^2$$

und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes

$$m. \quad max\,(+\,M) = -\left(0{,}0843 - 0{,}15\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,q\,l^2.$$

Hiernach wird M nur positiv, wenn $x > 0{,}562\,l$ ist.

Ruht der Träger nur auf der linken Mittelstütze auf, so dürfte das I. Feld nicht, das II. und III. nur so weit belastet sein, dass die rechte Mittelstütze eben berührt wird; denn bei weiterer Belastung würde das Belastungsgesetz, welches dem Aufruhen auf beiden Mittelstützen entspricht, in Betracht kommen. Betrachtet man den Träger nur als aus zwei Feldern mit den Längen l, $l + \lambda$ bestehend, so wird $2 M_2 (2l + \lambda) = \mathfrak{N}' (l + \lambda)$, $Q_1' = \frac{M_2}{l}$, $max\,(+ M) = - Q_1' x$, d. i.

$$max\,(+ M) = \frac{\mathfrak{N}' (l + \lambda) x}{2l (2l + \lambda)}.$$

Für unser Beispiel wird

$$max\,(+ M) = 0{,}2561 \frac{x}{l} \mathfrak{N}'.$$

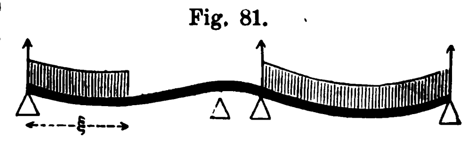
Das zweite Feld mit der Länge $\lambda + l$ kann nun aber verschieden belastet sein, damit der Druck auf die rechte Mittelstütze $= 0$ wird, wie in §. 65 näher angegeben ist. Die Berechnung von $\mathfrak{N}'$ zeigt, dass $\mathfrak{N}'$, somit auch $max\,(+ M)$ am grössten wird, wenn das Zwischenfeld und das III. Feld von $x = 0$ bis $x = 0{,}197 l$ belastet ist. Für diese Belastung wird nach 17 (S. 55) $\mathfrak{N}' = \frac{1}{4}\, 0{,}247^2\, (2 - 0{,}247)^2\, p\, (l + \lambda)^2 = 0{,}04687 p\, (l + \lambda)^2 = 0{,}05167 p l^2$, mithin

$$max\,(+ M) = + 0{,}01323 \frac{x}{l} p l^2;$$

wornach sich indess $max\,(+ M)$ wesentlich kleiner ergiebt, als nach der vorigen Belastungsweise, so dass diese beizubehalten ist.

II. Theil. Für den Theil in der Nähe der linken Mittelstütze muss ein linker Theil des ersten Feldes belastet sein. Ruht der Träger auf beiden Mittelstützen auf, so müsste ausserdem das Zwischenfeld belastet sein. Die Belastung des ersten Feldes dürfte aber nur bis zu höchstens $x = 0{,}248 l$ reichen, wodurch Momente erzeugt werden, die kleiner sind, als nach der Formel *m*. Ruht der Träger nur auf der rechten Mittelstütze auf, so müsste das III. Feld total belastet sein (Fig. 81). In der in §. 50 angewendeten Weise ergiebt sich für die Länge des Zuges im ersten Felde, wenn wir $l + \lambda = l_1$ setzen

Fig. 81.



$$\xi = l_1 \sqrt{1 - \frac{2 (l + l_1) (l_1 - x)}{x l_1}}.$$

Für unser Beispiel wird

$$\xi = l_1 \sqrt{4{,}9048 - 4{,}1 \frac{x}{l}} = l \sqrt{5{,}4075 - 4{,}5203 \frac{x}{l}},$$

wonach diese Gleichung nur gilt, wenn $x > 0,836\,l$ ist. Ferner darf ξ nicht $> 0,707\,l$ sein, mithin x nicht $> 0,921\,l$. Es ergiebt sich nun

$$max\,(+M) = \left(0,05807\,\frac{x}{l} - 0,5\,\frac{\xi^2}{l^2} + 0,59814\,\frac{x\,\xi^2}{l^3} - 0,05531\,\frac{x\,\xi^4}{l^5}\right) p\,l^2$$

$$= \left(1,6752\,\frac{x}{l} - 2,7038 + 1,1300\,\frac{l}{x}\right) p\,l^2$$

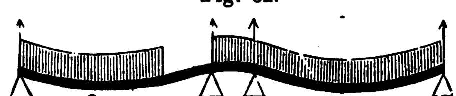
$$= \left(1,1726\,\frac{x}{l} - 1,8927 + 0,7910\,\frac{l}{x}\right) q\,l^2$$

und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach l:

$$n.\ max\,(+M) = \left(0,7910\,\frac{l}{x} - 1,8927 + 1,0527\,\frac{x}{l} + 0,15\,\frac{x^2}{l^2}\right) q\,l^2.$$

Ruht endlich der Träger nur auf der linken Mittelstütze auf, so muss das II. und III. Feld nur in so weit belastet sein, dass der Druck auf die rechte Mittelstütze eben $= 0$ ist; mit dem Wechsel der Belastung des ersten Feldes wechselt hiernach auch die Belastung im III. Felde. Wir begnügen uns indess, eine totale Belastung des III. Feldes anzunehmen (Fig. 82), weil, wie wir im vorigen §. gesehen haben, das Moment an der linken Mittelstütze sehr wenig von der Belastung des III. Feldes abhängt. Nach Formel 97 (Seite 88) wird mit Berücksichtigung des Werthes von ν_1 nach §. 60

Fig. 82.



$$\xi = l\sqrt{1 - \frac{(2+m)(2+3m)}{2(l+m)}\left(\frac{l}{x} - 1\right)}.$$

Für unser Beispiel wird hiernach

$$\xi = l\sqrt{3,0988 - 2,0988\,\frac{l}{x}},$$

wonach diese Gleichung nur gilt, wenn $x > 0,678\,l$ ist. Ferner muss $\xi > 0,707\,l$, also $x > 0,807\,l$ sein, damit ein Aufruhen auf beiden Mittelstützen stattfinde. Es ergiebt sich nun leicht

$$max\,(+M) = \left(-\,0,0028\,\frac{x}{l} - 0,5\,\frac{\xi^2}{l^2} + 0,7382\,\frac{x\,\xi^2}{l^3} - 0,1191\,\frac{x\,\xi^4}{l^5}\right) p\,l^2$$

$$= \left(1,1415\,\frac{x}{l} - 1,5493 + 0,5248\,\frac{l}{x}\right) p\,l^2$$

$$= \left(0,7991\,\frac{x}{l} - 1,0845 + 0,3673\,\frac{l}{x}\right) q\,l^2$$

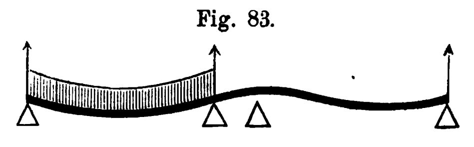
und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach i:

$$o.\ max\,(+M) = \left(0,3673\,\frac{l}{x} - 1,0845 + 0,6840\,\frac{x}{l} + 0,15\,\frac{x^2}{l^2}\right) q\,l^2.$$

Von $x = 0,864\,l$ bis $x = l$ giebt diese Formel grössere Werthe, als die vorige. Für $x = l$ wird $max\,(+M) = 0,1168\,q\,l^2$, während sich nach der genaueren Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise $max\,(+M) = 0,1169\,q\,l^2$ ergiebt.

b) Negative Momente. I. Theil. Im ersten Theile wird M zum negativen Maximum, entweder wenn nur das I. Feld belastet ist, wobei nur ein Aufruhen auf der linken Mittelstütze stattfindet (Fig. 83), oder wenn das I. und III. Feld belastet sind, wobei der Träger auf beiden Mittelstützen aufruht.

Fig. 83.



Im ersten Falle ist $2M_1(2l + \lambda) = \frac{1}{4}p\,l^3$, im letzteren $2M_1(l + \lambda) + M_1\,\lambda = \frac{1}{4}p\,l^3$, also

Belastung des I. Feldes:

$$M_1 = \frac{p\,l^3}{8(2l + \lambda)},$$

Belastung des I. und III. Feldes:

$$M_1 = \frac{p\,l^3}{4(2l + 3\lambda)}.$$

Da nun $Q_1' = \frac{1}{2}p\,l - \frac{M_1}{l}$, $M = -Q_1'x + \frac{1}{2}p\,x^2 = -\frac{1}{2}p\,x\,(l - x) + M_1\,\frac{x}{l}$ ist, und M_1 im ersten Falle wesentlich kleiner, als im letzteren Falle ist, so werden die negativen Momente jedenfalls im ersten Falle grösser, als im letzteren. Sonach wird

$$max\,(-M) = -\frac{1}{2}p\,x\,(l - x) + \frac{p\,l^2 x}{8(2l + \lambda)}.$$

Für unser Beispiel wird

$$max\,(-M) = -\left(0,4390 - 0,5\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,p\,l^2$$

$$= -\left(0,3073 - 0,35\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,q\,l^2$$

und mit Berücksichtigung des Eigengewichtes nach *k:*

$$p.\quad max\,(-M) = -\left(0,4178 - 0,5\,\frac{x}{l}\right)\frac{x}{l}\,q\,l^2.$$

Auf den zweiten Theil brauchen wir nicht einzugehen, da in diesem in Folge des Eigengewichtes keine negativen Momente entstehen.

Zwischenfeld. Wegen der Kleinheit des Zwischenfeldes kann man das Moment innerhalb desselben als constant annehmen; in der That

ändert es sich in unserem Beispiele nur um $0{,}0002\, q l^2$. Negative Momente kommen hier in Folge des Eigengewichtes nicht zu Stande. Das grösste positive Moment ist identisch mit dem Maximum von M_1. In unserem Beispiele ist dasselbe:

$$q.\quad max\,(+M) = 0{,}1169\, q l^2.$$

In folgender Tabelle haben wir die Maximalmomente nochmals zusammengestellt:

x	$max\,(+M)$	$max\,(-M)$	x	$max\,(+M)$	$max\,(-M)$
I. Feld	+	—	0,770	0,0242	0,0242
0	—	0	0,8	0,0286	0,0142
0,1	—	0,0368	0,85	0,0411	—
0,2	—	0,0636	0,9	0,0608	—
0,3	—	0,0803	0,95	0,0876	—
0,4	—	0,0871	1	0,1168	—
0,5	—	0,0839	*II. Feld*		
0;6	0,0034	0,0707	0	0,1168	—
0,7	0,0145	0,0475	0,025	0,1166	—
$.\,l$	$.\,q l^2$	$.\,q l^2$	$.\,l$	$.\,q l^2$	$.\,q l^2$

Hiernach ist

$$Max\,(+M) = 0{,}1169\, q l^2,\quad Max\,(-M) = 0{,}0873\, q l^2,$$
$$M \text{ im Mittel} = 0{,}0630\, q l^2.$$

Für einen continuirlichen Träger mit derselben Gesammtlänge und einem Mittellager ergiebt sich nach §. 57:

$$Max\,(+M) = 0{,}1313\, q l^2,\quad Max\,(-M) = 0{,}0921\, q l^2,$$
$$M \text{ im Mittel} = 0{,}0720\, q l^2,$$

so dass hier die Momente durchschnittlich um *14 Procent* grösser ausfallen. Wenn man sich das Stück zwischen den Mittelstützen herausgeschnitten und dann beide Theile wieder vereinigt denkt, so ergiebt sich nach §. 57:

$$Max\,(+M) = 0{,}1250\, q l^2,\quad Max\,(-M) = 0{,}0877\, q l^2,$$
$$M \text{ im Mittel} = 0{,}0685\, q l^2,$$

so dass sich hier M durchschnittlich um *9 Procent* grösser ergiebt.

§. 68. Allgemeine Schlüsse. Aus den früher für einfache Auflager aufgestellten Regeln und dem soeben durchgeführten Beispiele lassen sich für doppelte Auflager folgende allgemeine Regeln aufstellen, die indess zum Theil Näherungsregeln sind:

1. Die Transversalkraft wird zum positiven oder negativen Maximum, wenn das fragliche Feld von dem fraglichen Querschnitte aus auf der rechten oder linken Seite belastet ist und wenn die übrigen Hauptfelder abwechselnd derart belastet sind, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes, an das unbelastete Ende ein belastetes Feld stosst, wobei der Träger auf denjenigen Stützen, welche die nicht belasteten Hauptfelder begrenzen, nicht aufruht (Fig. 84). Hierbei sind aber zwei

Fig. 84.

Fälle zu untersuchen; das zwischen dem fraglichen und dem nächsten belasteten Hauptfelde liegende Zwischenfeld AB ist entweder unbelastet und der Träger auf der Stütze B nicht aufruhend (Fig. 84 *a*), oder es ist belastet und der Träger auf der Stütze B aufruhend (Fig. 84 *b*) anzunehmen.

Sollte die Construction die genauere Kenntniss der Transversalkräfte in den Zwischenfeldern nöthig machen, so müsste das eine angrenzende Feld total, das andere nur so weit belastet angenommen werden, dass sich der Druck auf die eine Stütze $= 0$ ergäbe (Fig. 79).

2. Das Moment wird in den mittleren Theilen der Mittelfelder und in den Endtheilen der Endfelder zum positiven oder negativen Maximum, wenn das fragliche Feld gar nicht oder total, die übrigen Hauptfelder abwechselnd belastet sind, wobei der Träger auf denjenigen Stützen, welche die nicht belasteten Hauptfelder begrenzen, nicht aufruht.

In den zunächst den Mittelstützen liegenden Theilen der Hauptfelder wird das Moment zum positiven Maximum, wenn das fragliche Feld von der am weitesten vom Querschnitte abstehenden Stütze des Feldes aus partiell belastet ist, und wenn die übrigen Hauptfelder abwechselnd derart belastet sind, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes, an das unbelastete Ende ein belastetes Feld

stösst (Fig. 84). Hierbei sind indess dieselben zwei Fälle zu untersuchen, wie bei den Transversalkräften (Fig. 84*a* und *b*). Die Länge der belasteten Strecke des fraglichen Feldes ist durch 52 bis 57 (Seite 71 und 72) bestimmt.

Endlich wird das Moment in den mittleren Theilen der Mittelfelder und in den Endtheilen der Endfelder zum negativen Maximum, wenn das fragliche Feld total und die übrigen Hauptfelder abwechselnd belastet sind, wobei nur ein Aufruhen an denjenigen Mittelstützen anzunehmen ist, welche die belasteten Hauptfelder begrenzen. In den zunächst den Mittelstützen gelegenen Theilen kommt das negative Moment in der Regel nicht in Frage.

In den Zwischenfeldern kann das Moment constant und zwar gleich dem grössten Moment an den das fragliche Zwischenfeld begrenzenden Stützen angenommen werden.

Man erhält ferner nahezu richtige Werthe, die durchschnittlich ein wenig zu gross sind, wenn man sich die Zwischenfelder ganz herausgeschnitten denkt; alsdann lassen sich auch die im X. Kapitel aufgestellten Tabellen verwenden.

Nach dem berechneten Beispiele kann man annehmen, dass bei Anordnung von doppelten Lagern mit dem Abstande λ die Transversalkräfte um ungefähr $64 \frac{\lambda}{l}$ Procent, die Momente um ungefähr $250 \frac{\lambda}{l}$ Procent durchschnittlich kleiner ausfallen, als bei Anordnung einfacher Lager.

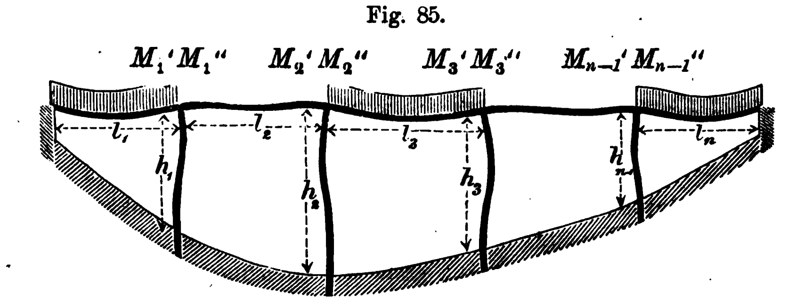
B. Feste Verbindung mit den Pfeilern.

§. 69. Träger, welche mit den Pfeilern fest verbunden sind. Wir wollen noch im Kurzen auf den Fall eingehen, dass die Träger fest mit den Pfeilern verbunden sind. Bei mehreren Brücken mit eisernen Pfeilern tritt dieser Fall wirklich ein. Ist eine wirklich feste Verbindung beider Theile nicht vorhanden, so kann sich demnach der Pfeiler unter dem Drucke der Träger so deformiren, dass ein vollkommener Anschluss beider Theile stattfindet. Bei der Besprechung der Pfeiler werden wir auf diesen Fall zurückkommen.

Die Verbindung beider Theile lässt sich in der Theorie durch die Bedingung ausdrücken, dass die Tangenten an die Träger- und Pfeileraxe an jedem Lager auf einander senkrecht stehen müssen, dass sich also beide Axen bei der Deformirung um gleich viel verdrehen. Wir bezeichnen diese Verdrehung an den einzelnen Pfeilern mit $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$. An den End-

pfeilern setzen wir eine Verbindung nicht voraus, so dass hier das Moment O sein muss. Die Momente an den Mittelpfeilern seien M_1', M_1'', M_2', M_2'' ... (Fig. 85), wobei sich der untere Index auf die Nummer des

Fig. 85.



Pfeilers bezieht, und ein Apostroph die linke Seite, zwei Apostrophe die rechte Seite des Pfeilers bedeuten. Nach den Gleichungen 10 (Seite 54) wird alsdann

$$
109.\quad \begin{cases}
6EW\tau_1 = +\, l_1 \,(\qquad\quad + 2M' - \mathfrak{N}_1''), \\
6EW\tau_1 = -\, l_2 \,(2M_1'' + \quad M_2' - \mathfrak{N}_2'), \\
6EW\tau_2 = +\, l_2 \,(\; M_2'' + 2M_2' - \mathfrak{N}_2''), \\
6EW\tau_2 = -\, l_3 \,(2M_2'' + \quad M_3' - \mathfrak{N}_3'), \\
\quad \cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Denken wir uns den Träger auf beiden Seiten eines Pfeilers zerschnitten, so haben die Spannungen in den beiden Schnitten die Momente M' und M'', es wirkt sonach auf den Pfeiler ein Kräftepaar mit dem Momente $M'' - M'$. Wie nun auch der Pfeiler construirt sein möge, so wird die Verdrehung τ der Differenz $M'' - M'$ proportional sein, so dass wir allgemein $EA\tau = h\,(M'' - M')$ setzen können, worin h die Pfeilhöhe und A einen von den Querschnittsverhältnissen des Pfeilers abhängigen Werth bezeichnen möge, der sich in jedem Falle leicht nach den bekannten Biegungsgesetzen bestimmen lässt. Wir haben demnach

$$
110.\quad \begin{cases}
EA_1\tau_1 = h_1\,(M_1'' - M_1'), \\
EA_2\tau_2 = h_2\,(M_2'' - M_2'), \\
\quad \cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Die Gleichsetzung der Ausdrücke für τ_1, τ_2, τ_3, ... giebt:

$$
111.\quad \begin{cases}
6Wh_1\,(M_1'' - M_1') = +\, A_1 l_1\,(2M_1' - \mathfrak{N}_1''), \\
6Wh_1\,(M_1'' - M_1') = -\, A_1 l_2\,(2M_1'' + M_2' - \mathfrak{N}_2'), \\
6Wh_2\,(M_2'' - M_2') = +\, A_2 l_2\,(M_1'' + 2M_2' - \mathfrak{N}_2''), \\
6Wh_2\,(M_2'' - M_2') = -\, A_2 l_3\,(2M_2'' + M_3' - \mathfrak{N}_3'), \\
\quad \cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Es sind dies $2(n-1)$ Gleichungen und in der That haben wir auch $2(n-1)$ unbekannte Momente. Die Subtraction je zweier Gleichungen giebt die den früher aufgestellten Normalgleichungen analogen Beziehungen:

$$
112. \quad \begin{cases}
2M_1'l_1 + 2M_1''l_2 + M_2'l_2 = \mathfrak{R}_1''l_1 + \mathfrak{R}_2'l_2, \\
M_1''l_2 + 2M_2'l_2 + 2M_2''l_3 + M_3'l_3 = \mathfrak{R}_2''l_2 + \mathfrak{R}_3'l_3, \\
M_2''l_3 + 2M_3'l_3 + 2M_3''l_4 + M_4'l_4 = \mathfrak{R}_3''l_3 + \mathfrak{R}_4'l_4. \\
\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Auf eine allgemeine Auflösung der Gleichungen verzichten wir.

§. 70. **Belastung eines einzigen Feldes.** Wir denken uns eine beliebige Anzahl der ersten Felder unbelastet. Alsdann ist $\mathfrak{R}_1'' = \mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = .. = 0$ zu setzen. Die erste der Gleichungen 111 giebt

$$M_1'' = \left(1 + \frac{A_1 l_1}{3Wh_1}\right) M_1'.$$

Hierauf folgt, dass M_1' und M_1'' gleiches Vorzeichen haben, dass aber $M_1'' > M_1'$ ist. Ferner giebt die erste der Gleichungen 112:

$$M_2' = -2\left(M_1'\frac{l_1}{l_2} + M_1''\right).$$

Hiernach haben M_2' und M_1'' entgegengesetztes Vorzeichen und es ist

$$M_2' > -2M_1''.$$

Die dritte der Gleichungen 111 giebt:

$$M_2'' = M_2' + \frac{A_2 l_2}{6Wh_2}(2M_2' + M_1'').$$

M_2' und M_1' haben entgegengesetztes Vorzeichen; da aber $M_2' > -2M_1''$, so hat das zweite Glied das Vorzeichen von M_2'. Folglich haben M_2'' und M_2' gleiche Vorzeichen und es ist $M_2'' > M_2'$. Die zweite der Gleichungen 112 giebt jetzt:

$$M_3' = -2\left[\left(\frac{1}{2}M_1'' + M_2'\right)\frac{l_2}{l_3} + M_2''\right].$$

M_1'' und M_2' haben entgegengesetztes Vorzeichen; da aber $M_2' > 2M_1''$, so hat $\frac{1}{2}M_1'' + M_2'$ das Vorzeichen von M_2' und M_2''; folglich haben M_3' und M_2'' entgegengesetztes Vorzeichen und es ist

$$M_3' > -2M_2''.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man zu folgenden allgemeinen Sätzen:

1. Die Momente auf den beiden Seiten desselben Pfeilers haben gleiches Vorzeichen (Fig. 86).

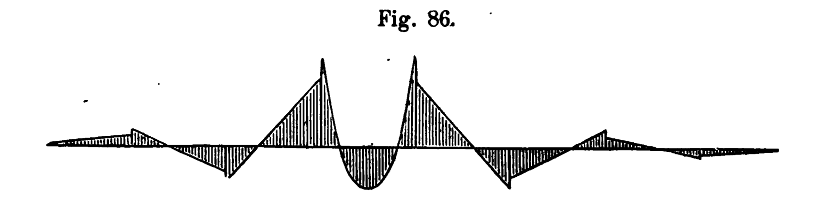
2. Die Momente an den auf einander folgenden Pfeilern haben entgegengesetzte Vorzeichen (Fig. 86).

3. Die auf einander folgenden Momente an den Pfeilern wachsen nach dem belasteten Felde hin und zwar sind die Momente an einem Pfeiler mindestens doppelt so gross, als die Momente an dem vorhergehenden Pfeiler (Fig. 86).

4. Das Verhältniss der auf einanderfolgenden Momente und hiermit auch die Lage des Punktes, in welchem das Moment Null wird, ist von der Lage des belasteten Feldes und von der Belastungsweise unabhängig.

5. Sonach giebt es in jedem Felde zwei Fixpunkte, welche ausserhalb des mittleren Drittheils liegen, welche die Eigenschaft haben, dass das Moment im linken Fixpunkte unabhängig von der Belastung der rechten, das Moment am rechten Fixpunkte unabhängig von der Belastung der linken Felder ist.

Fig. 86.

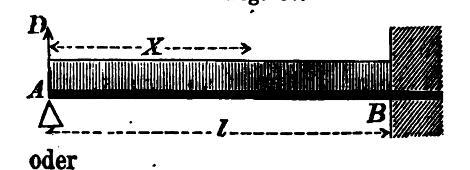


Hieraus aber ergiebt sich nun leicht, dass alle im VII. Kapitel ermittelten Regeln für die gefährlichste Belastungsweise in Betreff der Transversalkräfte und Momente auch hier ihre volle Gültigkeit behalten. Selbst die Gleichungen 52 bis 57 (Seite 71 u. 72) zur Bestimmung der gefährlichsten Belastung im fraglichen Felde behalten ihre Gültigkeit; nur haben hier die Abstände a und b der beiden Fixpunkte von den nächsten Stützen andere Werthe, welche sich leicht aus dem Verhältnisse der auf einander folgenden Momente der unbelastet gedachten Felder bestimmen lassen.

Die Grössen der Transversalkräfte und Momente liegen zwischen denen, welche einem freien Auflager des continuirlichen Trägers auf den Stützen und einer festen Einspannung der Enden jedes Feldes entsprechen und nähern sich den letzteren um so mehr, je niedriger und steifer die Pfeiler sind. Es ist daher zur Beurtheilung des Einflusses der Pfeiler noch von Interesse, den Träger mit einem und mit zwei eingespannten Enden zu untersuchen, was im Folgenden geschehen soll.

§. 71. Träger mit einem eingespannten und einem frei aufliegenden Ende (Fig. 87). Das Moment am eingespannten Ende B sei $= M''$. Alsdann giebt die zweite der Gleichungen 10 (S. 54), wenn wir $M' = 0$ und der horizontalen Einspannung wegen $\tau_2 = 0$ und $s = 0$ setzen, $2M'' - \mathfrak{N}' = 0$, oder

Fig. 87.



$$113. \quad M'' = \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = \frac{1}{2}\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'',$$

wenn, wie früher, $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ die Momente an den Enden für eine horizontale Einspannung beider Enden bezeichnen.

1. **Eigengewicht.** Setzen wir $\mathfrak{N}'' = \frac{1}{4}gl^2$, so wird

$$114. \quad M'' = \frac{1}{8}gl^2.$$

Da nun, wenn D den linken Stützendruck bezeichnet, $M'' = -Dl + \frac{1}{2}gl^2$ ist, so wird $D = \frac{1}{2}gl - \frac{M''}{l}$, d. i.

$$115. \quad D = \frac{3}{8}gl.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$116. \quad Q = +\frac{1}{8}\left(3 - 8\frac{x}{l}\right)gl,$$

$$117. \quad M = -\frac{1}{8}\frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x}{l}\right)gl^2.$$

2. **Zufällige Last.** *a*) Transversalkräfte. Wenn der rechte Theil des Trägers vom fraglichen Querschnitte aus belastet ist, so wird nach 113 und 19 (Seite 56):

$$M'' = \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = \frac{p\,(l^2 - x^2)^2}{8l^2}.$$

Hieraus ergiebt sich nun $D = \frac{1}{2}p\,\frac{(l-x)^2}{l} - \frac{M''}{l} = \frac{p\,(l-x)^2\,(3l+x)}{8l^3}$. Ebenso gross ist $max\,(+Q)$; $max\,(-Q)$ wird sodann $= Q_t - max\,(+Q)$ $= \frac{1}{8}\left(3 - 8\frac{x}{l}\right)pl - max\,(+Q)$, d. i.

$$118. \quad \begin{cases} max\,(+Q) = +\frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3\left(3 + \frac{x}{l}\right)pl, \\ max\,(-Q) = -\frac{1}{8}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(6 - \frac{x^2}{l^2}\right)pl. \end{cases}$$

b) Momente. Liegt eine Einzellast G im Abstande ξ von dem linken Ende, so ist nach 113 u. 13 (S. 55): $M'' = \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = g\frac{\xi^2(l^2-\xi^2)}{2l^2}$ und hiernach $D = G\frac{l-\xi}{l} - \frac{M''}{l}$, d. i.

$$D = G\frac{(l-\xi)^2(2l+\xi)}{2l^3}.$$

Liegt nun die Einzellast rechts vom fraglichen Querschnitte, so ist $M = -Dx$, somit M stets negativ, da D stets positiv ist. Liegt die Einzellast links vom fraglichen Querschnitte, so ist $M - Dx + G(x-\xi)$, d. i.

$$M = -\frac{G\xi(2l^3 - 2l^2x + \xi^2x)}{2l^3}.$$

Hiernach wird $M = 0$ für

$$119. \quad \xi_x = l\sqrt{3 - 2\frac{l}{x}}.$$

Je nachdem nun $\xi \gtrless$ ist als dieser Werth, wird M negativ oder positiv. Ist $x = \frac{2}{3}l$, so wird $\xi_x = 0$; für noch kleinere x wird ξ_x imaginär und M stets negativ. Von $x = 0$ bis $x = \frac{2}{3}l$ wird demnach M zum negativen Maximum bei totaler Belastung; positiv kann M in dieser Strecke nicht werden. Von $x = \frac{2}{3}l$ bis $x = l$ wird M zum positiven und negativen Maximum, je nachdem die Last von $\xi = l\sqrt{3 - 2\frac{l}{x}}$ bis zum linken oder rechten Ende reicht.

Im ersten Theile wird $max(+M) = 0$ und

$$120. \quad max(-M) = -\frac{1}{8}\frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x}{l}\right)pl^2.$$

Im zweiten Theile wird für das positive Maximum nach 113 u. 17 (Seite 65) $M'' = \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = \frac{p\xi^2(2l^2-\xi^2)}{8l^2}$. Es wird nun $D = \frac{p\xi(2l-\xi)}{2l} - \frac{M''}{l}$ und $max(+M) = -Dx + p\xi(x - \frac{1}{2}\xi) = M''\frac{x}{l} - \frac{p\xi^2(l-x)}{2l}$, d. i.

$$max(+M) = \frac{p\xi^2(6l^2x - 4l^3 - \xi^2x)}{8l^3}.$$

Setzt man hierin $\xi^2 = l^2\left(3 - 2\frac{l}{x}\right)$, so ergiebt sich der einfache Ausdruck

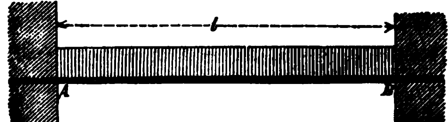
$$121. \quad max(+M) = +\frac{1}{8}\frac{x}{l}\left(3 - 2\frac{l}{x}\right)^2 pl^2.$$

Hiernach ist nun endlich $max(-M) = -\frac{1}{8}\frac{x}{l}\left(3 - 4\frac{x}{l}\right)pl^2$
$-\frac{1}{8}\frac{x}{l}\left(3 - 2\frac{l}{x}\right)^2 pl^2$, d. i.

$$121a.\quad max(-M) = -\frac{1}{2}\frac{x}{l}\left(3 - \frac{x}{l} - 3\frac{l}{x} - \frac{l^2}{x^2}\right)pl^2.$$

§. 72. **Träger, dessen beide Enden eingespannt sind.** Die Momente an den beiden Enden A und B (Fig. 88) seien M' und M''; M' und M'' ist alsdann hier offenbar identisch mit $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$.

Fig. 88.



1. **Eigengewicht.** Nach 14 (Seite 55) wird

$$122.\quad M' = M'' = \frac{1}{12}gl^2.$$

Es wird nun $M'' = M' - Q'l + \frac{1}{2}gl$, also, da $M' = M''$ ist, $Q' = \frac{1}{2}gl$. Ferner wird nun $Q = Q' - gx$ und $M = M' - Q'x + \frac{1}{2}gx^2$; d. i.

$$123.\quad Q = \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)gl,$$

$$124.\quad M = \frac{1}{12}\left[1 - 6\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]gl^2.$$

2. **Zufällige Last.** *a*) Transversalkräfte. Wenn der rechte Theil des Feldes auf die Länge ξ_1 belastet ist, so wird nach 18 (S. 56):

$$M' = \frac{p\xi_1^3(l + 3\xi)}{12l^2},\quad M'' = \frac{p\xi_1^2(l^2 + 2l\xi + 3\xi^2)}{12l^2}.$$

Ferner wird $M'' = M' - Q'l + \frac{1}{2}p\xi_1^2$, also $Q' = \frac{p\xi_1^2}{2l} + \frac{M' - M''}{l}$, d. i.

$$Q' = \frac{p\xi_1^2(l^2 - l\xi - \xi^2)}{2l^3}.$$

Für das positive Maximum von Q muss nur der rechte Theil des Feldes vom fraglichen Querschnitte aus belastet sein, es ist also $\xi = x$, $\xi_1 = l - x$ zu setzen. Da $max(+Q) = Q'$ ist, so wird

$$125.\quad ma(+Q) = +\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)pl.$$

Das negative Maximum von Q ergiebt sich der Symmetrie wegen offenbar, wenn man $1 - \frac{x}{l}$ für $\frac{x}{l}$ setzt und das Vorzeichen wechselt; hiernach wird

$$125a.\quad max(-Q) = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\left[-1 + 3\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right]pl.$$

b) **Momente.** Liegt eine Last G im Abstande ξ, ξ_1 von beiden Enden, so ist nach 12 (Seite 55):

$$M' = \frac{G\xi\xi_1^2}{l^2}, \quad M'' = \frac{G\xi^2\xi_1}{l^2}.$$

Ferner ist $M'' = M' - Q'l + G\xi_1$, also $Q' = G\frac{\xi_1}{l} + \frac{M' - M''}{l}$, d. i.

$$Q' = \frac{G\xi_1^2(l + 2\xi)}{l^3}.$$

Liegt nun die Last rechts vom fraglichen Querschnitte, so wird $M = M' - Q'x$, d. i.

$$M = \frac{G\xi_1^2}{l^3}(l\xi - lx - 2\xi x).$$

Hiernach wird $M = 0$ für

$$126. \quad \xi_x = \frac{lx}{l - 2x}.$$

Je nachdem nun $\xi \lesseqgtr \xi_x$ ist, wird M positiv oder negativ. Ist $x > \frac{1}{3}l$, so wird $\xi_x > l$, also ohne Bedeutung, und alsdann ist M stets negativ. In gleicher Weise lässt sich schliessen, wenn die Last links vom fraglichen Querschnitte liegt. Man gelangt so zu dem Schlusse: Im mittleren Dritttheil wird M zum negativen Maximum bei totaler Belastung; positiv kann hier M nicht werden. Im ersten Dritttheil wird M zum positiven oder negativen Maximum, je nachdem der Zug von $\xi = \frac{lx}{l - 2x}$ bis zum rechten oder linken Ende reicht.

Im mittleren Drittheil wird hiernach $max\,(+M) = 0$ und

$$127. \quad max\,(-M) = \frac{1}{12}\left[1 - 6\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]pl^2.$$

Im ersten Theile wird für das positive Maximum $Q' = \frac{p\xi_1^2}{2l} + \frac{M' - M''}{l}$,

$max\,(+M) = M' - Q'x = M'\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M''\frac{x}{l} - \frac{p\xi_1^2}{2l}x$, d. i. wenn man obige Ausdrücke für M' und M'' einsetzt,

$$128. \quad max\,(+M) = \frac{p\xi_1^2}{12l^2}(l^2 + 2l\xi - 3\xi^2 - 6lx).$$

Setzen wir hierin $\xi = \frac{lx}{l - 2x}$ und $\xi_1 = \frac{l(l - 3x)}{l - 2x}$, so ergiebt sich

$$128a. \quad max\,(+M) = \frac{p(l - 3x)^2(l^3 - 8l^2x + 21lx^2 - 24x^3)}{12(l - 2x)^3};$$

$max\,(-M)$ erhält man am besten durch Subtraction des $max\,(+M)$ von dem M für totale Belastung.

Das absolute negative Maximum ergiebt sich zu $\frac{1}{24}pl^2$, das absolute positive Maximum zu $\frac{1}{12}pl^2$.

§. 73. **Zusammenstellung.** In der folgenden Tabelle haben wir die wichtigsten Werthe der Transversalkräfte und Momente für den einfachen Träger, continuirlichen Träger und fest eingespannten Träger zur Vergleichung zusammengestellt. Bei den continuirlichen Trägern haben wir ein bestimmtes Verhältniss der Spannweiten nicht unterschieden, weil die Werthe in den einzelnen Feldern, wenn man in den Grössen gl, pl, gl^2, pl^2 für l die Spannweite des fraglichen Feldes (nicht, wie in den Tabellen zum X. Kapitel, die mittlere Spannweite) einführt, bei verschiedenem Verhältnisse der Spannweiten wenig variiren. Die in unserer Tabelle angegebenen Werthe sind genau für das Verhältniss *5* : *6* der äusseren zu den inneren Feldern.

Art des Trägers	*Positives Maximum*		*Negatives Maximum*		*Mittel*	
	Eigengew.	*Zuf. Last*	*Eigengew.*	*Zuf. Last*	*Eigengew.*	*Zuf. Last*
Transversalkraft.						
Einfacher Träger	*0,500*	*0,500*	*0,500*	*0,500*	*0,250*	*0,250*
Continuirlicher Träger mit 2 Feldern	*0,875*	*0,438*	*0,625*	*0,625*	*0,266*	*0,329*
Continuirlicher Träger mit 3 Feldern.						
I. Feld	*0,378*	*0,455*	*0,622*	*0,639*	*0,265*	*0,367*
II. Feld	*0,500*	*0,554*	*0,500*	*0,554*	*0,250*	*0,302*
Continuirlicher Träger mit 4 Feldern.						
I. Feld	*0,377*	*0,459*	*0,623*	*0,643*	*0,265*	*0,372*
II. Feld	*0,503*	*0,570*	*0,498*	*0,566*	*0,250*	*0,308*
Träger mit 1 eingespannten Ende	*0,375*	*0,375*	*0,625*	*0,625*	*0,266*	*0,295*
Träger mit 2 eingespannten Enden	*0,500*	*0,500*	*0,500*	*0,500*	*0,250*	*0,292*
	$\cdot gl$	$\cdot pl$	$\cdot gl$	$\cdot pl$	$\cdot gl$	$\cdot pl$
Momente.						
Einfacher Träger	*0,1250*	*0,1250*	*0*	*0*	*0,0833*	*0,0833*
Continuirlicher Träger mit 2 Feldern	*0,0703*	*0,0957*	*0,1250*	*0,1250*	*0,0495*	*0,0708*
Continuirlicher Träger mit 3 Feldern.						
I. Feld	*0,0715*	*0,6087*	*0,1218*	*0,1386*	*0,0474*	*0,0841*
II. Feld	*0,0404*	*0,0714*	*0,0846*	*0,0962*	*0,0347*	*0,0491*

Art des Trägers	Positives Maximum		Negatives Maximum		Mittel	
	Eigengew.	Zuf. Last	Eigengew.	Zuf. Last	Eigengew.	Zuf. Last
Continuirlicher Träger mit 4 Feldern.						
I. Feld	0,0412	0,1055	0,1227	0,1433	0,0440	0,0809
II. Feld	0,0703	0,0752	0,0851	0,0995	0,0351	0,0599
Träger mit 1 eingespannten Ende	0,0703	0,0703	0,1250	0,1250	0,0495	0,0708
Träger mit 2 eingespannten Enden	0,0417	0,0417	0,0833	0,0833	0,0321	0,0321
	$.gl^2$	$.pl^2$	$.gl^2$	$.pl^2$	$.gl^2$	$.pl^2$

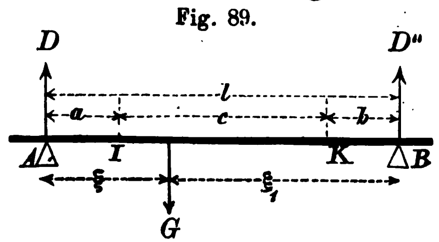
XII. Kapitel.

Belastung durch Einzellasten.

§. 74. **Einleitung.** Nachdem wir die Behandlung einer gleichmässig vertheilten Belastung für einen constanten Querschnitt zu Ende geführt, bleibt uns noch die im Allgemeinen etwas schwierigere Behandlung einer Belastung durch Einzellasten übrig. Die Nothwendigkeit dieser Behandlung hat folgende Gründe: 1. Bei den Brücken kommen Nebenträger mit kurzer Spannweite vor, welche als continuirliche Träger anzusehen sind, namentlich die Schienen selbst, Langschwellen und Schwellenträger; wegen der kurzen Spannweite aber würde die Annahme einer gleichmässig vertheilten Belastung zu ungenaue Resultate geben. 2. Auch für die Hauptträger ist es zweckmässig, den Einfluss eines Systems von Einzellasten zu kennen, um darnach die Wahl einer gleichmässig vertheilten Last treffen zu können, welche dieselbe Wirkung erzeugt.

§. 75. **Belastung eines Feldes durch eine einzige Einzellast.** In einem beliebigen Felde liege eine Einzellast G im Abstande ξ und ξ_1 von der linken und rechten Stütze A und B (Fig. 89). Alsdann sind die Normalmomente nach den Gleichungen a (S. 70):

Fig. 89.



$$129. \quad \begin{cases} M' = \dfrac{G a \xi \xi_1}{c l^2}\,[(2l - 3b) - \xi], \\ M'' = \dfrac{G b \xi \xi_1}{c l^2}\,[(l - 3a) + \xi], \end{cases}$$

worin a, c, b die Längen der Theile bezeichnen, in welche die Länge l des Feldes durch die beiden Fixpunkte J und K getheilt wird. Sind Q' und Q'' die Transversalkräfte auf beiden Seiten der Last, so ist $Q' = G\frac{\xi_1}{l} + \frac{M' - M''}{l}$, $Q'' = Q' - G = -G\frac{\xi}{l} + \frac{M' - M''}{l}$, d. i.

$$130. \quad \begin{cases} Q' = +\frac{G\xi_1}{cl^3}\left[cl^2 + (2a-b)l\xi - (a+b)\xi^2\right], \\ Q'' = -\frac{G\xi}{cl^3}\left[cl^2 + (2b-a)l\xi_1 - (a+b)\xi_1^2\right]. \end{cases}$$

Wie wir bereits in §. 47 nachgewiesen haben, ist Q' stets positiv, Q'' stets negativ.

Hauptsächlich wird es nun darauf ankommen, diejenige Lage der Einzellast zu ermitteln, für welche Q und M zum Maximum werden und die Maxima von Q und M selbst zu bestimmen.

1. **Transversalkräfte.** Für einen beliebigen Querschnitt wird $Q = Q'$, wenn die Last rechts vom Querschnitte liegt. Nun aber ergiebt sich $\frac{dQ'}{d\xi}$ stets negativ, d. h. mit wachsendem ξ nimmt Q' stets ab, so dass Q zum positiven Maximum wird, wenn die Last dicht rechts neben dem fraglichen Querschnitte liegt. Allgemein wird also die Transversalkraft Q zum positiven oder negativen Maximum, wenn die Last dicht rechts oder links neben dem fraglichen Querschnitte liegt.

Die Maxima von Q sind durch die Gleichung 130 bestimmt, wenn man darin $\xi = x$, $\xi_1 = l - x$ setzt. Für den speciellen Fall $a = b$ wird

$$131. \quad \begin{cases} Q' = \frac{Gax(l-x)(l-2x)}{cl^3} + G\left(1 - \frac{x}{l}\right), \\ Q'' = \frac{Gax(l-x)(l-2x)}{cl^3} - G\frac{x}{l}. \end{cases}$$

Zum absoluten Maximum wird Q an einer Stütze, wenn die Last unmittelbar neben dieser Stütze liegt; dasselbe ist $= \pm G$.

2. **Momente.** Das Moment an irgend einem Querschnitte wird, wenn die Last rechts von demselben liegt, nach Formel 51 (S. 70):

$$a. \quad M = \frac{G\xi_1}{cl^3}\left[\{bx - a(l-x)\}\xi^2 + \{a(2l-3b) - (2a-b)x\}l\xi - cl^2x\right]$$
$$= -\frac{G}{cl^2}\left[\{bx - a(l-x)\}\xi^3 + 3(l-b-x)al\xi^2 - \{a(2l-3b) + (l-3a)x\}l^2\xi - cl^3x\right].$$

Hiernach wird M für ein gegebenes x zum Maximum für

$$132. \quad 3[bx - a(l-x)]\xi^2 + 6(l-b-x)al\xi - [a(2l-3b) + (l-3a)x]l^2 = 0.$$

Setzt man den sich hieraus ergebenden Ausdruck für $(bx - al + ax)\xi^2$ in den vorigen Ausdruck für M ein, so erhält man

$$133. \quad max\,(+M) = \frac{G\,(a-x)\,\xi_1}{3cl^2}\Big[(2l - 3b)\,l - 3b\,\xi\Big].$$

Für das Moment an der linken Stütze oder für $x = 0$ wird $\xi^2 - 2\,(l - b)\,\xi + \frac{1}{3}\,(2l - 3b)\,l = 0$, mithin

$$134. \quad \xi = l - b - \sqrt{\frac{1}{3}l^2 - b\,(l-b)}.$$

Mit wachsendem x wächst auch das ξ. Für $x = a$ wird $\xi^2 - 2al\xi + l^2 = 0$, d. i. $(\xi - l)^2 = 0$ oder $\xi = l$. Ist x noch grösser, als a, so ergiebt sich überhaupt für kein ξ ein analytisches Maximum von M. Das analytische Maximum von M ist stets positiv.

Ebenso ergiebt sich, wenn die Last links vom fraglichen Querschnitte liegt,

$$M = \frac{G\xi}{cl^3}\Big[\{a\,(l-x) - bx\}\,\xi^2 + 3a\,(x + b - l)\,l\xi$$
$$+ (l - 3a)\,(x + b - l)\,l^2\Big],$$

und M wird hiernach zum Maximum für

$$135. \quad 3\,[a\,(l-x) - bx]\,\xi^2 - 6a\,(x + b - l)\,l\,\xi$$
$$+ (l - 3a)\,(x + b - l)\,l^2 = 0.$$

Der vorige Ausdruck für M geht hierdurch über in

$$136. \quad max\,(+M) = \frac{G\,(x + b - l)\,\xi}{3cl^2}\Big[2\,(l - 3a)\,l + 15a\,\xi\Big].$$

Diese Gleichungen gelten nur für Punkte, welche rechts vom rechten Fixpunkte liegen, oder wenn $x > l - c$ ist. Im ersten Felde ist in diesem Falle $a = 0$, mithin

$$137. \quad \xi = l\sqrt{\frac{l\,(x + b - l)}{3bx}}.$$

$$138. \quad max\,(+M) = \frac{2\,Gbx\,\xi^3}{cl^3} = \frac{2\,Gl}{3c}\sqrt{\frac{l\,(x + b - l)^3}{3bx}}.$$

Ausserdem aber ist ein wirkliches Maximum noch möglich, wenn die Last am Querschnitte selbst liegt. Nach Gleichung a. wird für $\xi = x$:

$$139. \quad M = -\frac{Gx\,(l-x)}{cl^2}\Big[(l-b)\,(l - 3a)\,l + (3a - b)\,lx$$
$$- (a + b)\,x^2\Big].$$

Dieses M ergiebt sich stets negativ. Wir können sonach behaupten:

Das Moment wird nur ausserhalb der beiden Fixpunkte positiv und zum positiven Maximum für den durch die Gleichungen 132 und 135 bestimmten Werthe für ξ; zum negativen Maximum dagegen wird das Moment, wenn die Last am fraglichen Querschnitte liegt.

§. 78. Belastung der übrigen Felder. Wir wollen jetzt untersuchen, wie die übrigen oder nicht fraglichen Felder belastet sein müssen, damit in einem bestimmten Felde Q und M zum Maximum werde.

Ist das fragliche Feld nicht belastet, so ist $M'' = M' - Q' l$ oder $Q' = \frac{M' - M''}{l}$; demnach ist

$$Q = Q' = \frac{M' - M''}{l}, \quad M = M' - Q'x = M' - (M' - M'') \frac{x}{l}.$$

Ist nun ein rechtes Feld belastet, so ist $M' = -\frac{a}{l-a} M''$, also

$$Q = -\frac{M''}{l-a}, \quad M = -\frac{M''(a-x)}{l-a}.$$

Ist ein linkes Feld belastet, so ist $M'' = -\frac{b}{l-b} M'$, also

$$Q = +\frac{M'}{l-b} M', \quad M = +\frac{M'(l - [illegible]}{[illegible] - b}.$$

Mit Rücksicht auf die in §. 44 ermittelten Gesetze für die Veränderung der Normalmomente ergiebt sich hieraus sofort, dass Q und M zum Maximum bei abwechselnder Belastung der Felder werden und zwar müssen dieselben Felder belastet sein, welche in §. 47 und 50 für eine gleichmässige Belastung näher bezeichnet wurden.

Hierbei muss jedes belastete Feld offenbar derart belastet sein, dass das Moment an der dem fraglichen Felde zugekehrten Stütze zu einem Maximum wird, da alsdann im fraglichen Felde auch M' und M'' zu einem Maximum werden.

Diese Lage der Last ist in einem rechten Felde durch 132, in einem linken Felde durch 135 bestimmt, wobei bezüglich $x = 0$, $x = l$ zu setzen ist. Demnach ist:

Rechtes Feld:

$$140. \quad \xi = l - b + \sqrt{\tfrac{1}{3}(l^2 - 5lb + 3b^2)};$$

linkes Feld:

$$141. \quad \xi = -a + \sqrt{\tfrac{1}{3}(l^2 - 3al + 3a^2)}.$$

Die betreffenden Normalmomente sind durch 133 und 136 bestimmt, wobei bezüglich $x = 0$ und $x = l$ zu setzen ist.

Nun aber tritt in der Praxis der Fall ein, dass durch den Minimalradstand der Fahrbetriebsmittel eine gewisse Minimalentfernung e der Lasten gegeben ist. Ergiebt sich nun nach der angegebenen Regel für die absolut ungünstigste Lage der Lasten die Entfernung derselben grösser als e, so ist die absolut ungünstigste Lage beizubehalten, insoferne die Fahrbetriebsmittel einen verschiedenen Radstand haben können. Ergiebt sich aber die Entfernung der Lasten kleiner als e, so muss natürlich die ungünstige Lage der Lasten, bei welcher der Abstand derselben $= e$ ist, ermittelt werden. Dies kann sich indess nur auf die Lasten im fraglichen und im anstossenden Felde beziehen. Im Folgenden wollen wir noch die hierzu nöthigen Untersuchungen führen:

1. **Transversalkräfte.** Denken wir uns zunächst die Last G im fraglichen Felde für $+ Q$ dicht rechts neben dem fraglichen Querschnitte liegend, die Last G_1 im nächsten linken Felde dagegen im Abstande e von G. Rücken wir G und G_1 um gleichviel nach rechts, so wird Q durch die Verschiebung von G vermindert, durch die Verschiebung von G_1 dagegen, welche ihrer absolut ungünstigsten Lage näher rückt, vergrössert. Da aber der Einfluss von G_1 auf Q überhaupt nur klein ist, so wird die Verminderung von Q grösser, als die Vergrösserung von Q, so dass diejenige Lage, in welcher G dicht neben dem fraglichen Querschnitte und G_1 im Abstande e von G liegt, die ungünstigste ist.

2. **Momente.** Schwieriger gestaltet sich die Bestimmung der ungünstigsten Lage in Betreff der positiven Momente. Im fraglichen Felde AB (Fig. 90) liege die Last G rechts vom fraglichen Querschnitte; alsdann ist dasjenige M, welches durch G erzeugt wird, durch die Formel a (Seite 132) bestimmt. Bezeichnen wir nun im nächsten linken Felde die drei Theile desselben mit a', c', b', den Abstand der Last G_1 von der linken und rechten Stütze mit ξ', ξ_1', so ist nach Formel 129:

Fig. 90.

$$M' = \frac{G_1 b' \xi' \xi_1'}{c' l'^2} [(l' - 3a') + \xi'].$$

Es wird nun $Q' = \frac{M' - M''}{l'}$, $M = M' - Q'x = M' - (M' - M'') \frac{x}{l'}$, oder, da $M'' = -\frac{b'}{l' - b'} M'$ ist, $M = \left(1 - \frac{x}{l' - b'}\right) M'$. Sonach ergiebt sich nun als das Moment, welches von beiden Lasten erzeugt wird,

$$142. \quad M = \frac{G\xi_1}{cl^3}\Big[\{bx - a(l-x)\}\xi^2 + \{a(2l-3b) - (2a-b)x\}l\xi - cl^2x\Big] + \frac{G_1 b'\xi'\xi_1'}{c'l'^2}\left(1 - \frac{x}{l'-b'}\right)\Big[(l'-3a') + \xi'\Big].$$

Hierbei ist $\xi + \xi_1' = e$, also, wenn man ξ als Variabele annimmt, $\xi_1 = l - \xi$, $\xi_1' = e - \xi$, $\xi' = l' - e + \xi$. Differenziirt man nach ξ und setzt den Differenzialquotienten Null, so ergiebt sich für ξ eine quadratische Gleichung. Wir beschränken uns indessen auf das absolute positive Maximum von M, welches für $x = 0$ entsteht. Für $x = 0$ wird

$$143. \quad M = \frac{Ga\xi\xi_1}{cl^2}(2l - 3b - \xi) + \frac{G'b'\xi'\xi_1'}{c'l'^2}(l' - 3a' + \xi').$$

Differenziirt man, nachdem man $\xi_1 = l - \xi$, $\xi' = l' - \xi_1'$ gesetzt hat, nach ξ und ξ_1, wobei $d\xi = -d\xi'$ zu setzen ist, und setzt den Differenzialquotienten $= 0$, so ergiebt sich

$$144. \quad \frac{Ga}{cl^2}\Big[(2l - 3b)l - 6(l-b)\xi + 3\xi^2\Big] - \frac{G'b'}{c'l'^2}\Big[(2l' - 3a')l' - 6(l' - a')\xi_1' + 3\xi_1'^2\Big] = 0,$$

worin $\xi_1' = e - \xi$ zu setzen ist. Ist hierbei $G = G'$, $l = l'$, $b' = a$, $a' + b$, $c' = c$, so wird

$$2(l - b)(\xi - \xi_1') - (\xi^2 - \xi_1'^2) = 0,$$

oder, da $\xi^2 - \xi_1'^2 = (\xi - \xi_1')(\xi + \xi_1') = (\xi - \xi_1')e$ ist,

$$(\xi - \xi_1')(2l - 2b + e) = 0,$$

mithin $\xi_1' = \xi = \frac{1}{2}e$, und zwar wird alsdann

$$145. \quad max\,(+M) = \frac{Gae(2l - e)(4l - 6b - e)}{4cl^2}.$$

3. Stützendruck. Wir nehmen zunächst nur eine Last G im Felde AB (Fig. 90) an; alsdann ist Q' durch Formel 130 bestimmt. Bezeichnen wir ferner das Moment an der Stütze C mit M^0, so ist im Felde AC $Q = \frac{M^0 - M'}{l'}$, oder, da $M^0 = -\frac{a'}{l' - a'}M'$ ist, $Q = -\frac{M'}{l' - a'}$; M' aber ist durch Formel 129 bestimmt. Nun aber ist der Stützendruck $D = Q' - Q$, d. i.

$$146. \quad D = \frac{G\xi_1}{cl^3}\Big[cl^2 + (2a - b)l\xi - (a + b)\xi^2\Big] + \frac{Ga\xi\xi_1(2l - 3b - \xi)}{cl^2(l' - a')}.$$

Ist nun auch das Feld AC belastet, so erhält man den entsprechenden Ausdruck für den von dieser Last erzeugten Stützendruck, wenn man l mit l', a, b, c mit b', a', c' und ξ, ξ_1 mit ξ_1', ξ' verwechselt. Indem man nach ξ, ξ_1' differenziirt, wobei $d\xi_1' = -d\xi$, und den Differenzialquotienten gleich Null setzt, erhält man für die ungünstigste Lage eine quadratische Gleichung.

Ausserdem müssen die übrigen Felder abwechselnd derart belastet sein, dass die Normalmomente für die der fraglichen Stütze zugekehrten Enden des belasteten Feldes ein Maximum werden.

Zur weiteren Erläuterung behandeln wir im Folgenden zwei Beispiele, nämlich den einfachen Fall eines Trägers mit zwei Feldern und den eines Trägers mit unendlich vielen, gleichlangen Feldern.

§. 77. **Träger mit zwei Feldern.** Im ersten Felde wird nach §. 56 $a = o$, $b = \frac{1}{5}l$ und $c = \frac{4}{5}l$. Das Normalmoment M_1 wird nach 137 zum Maximum, wenn die Last im I. Felde bei $\xi = \frac{1}{3}\sqrt{3}l = 0{,}5774l$ oder im II. Felde bei $\xi = \frac{1}{3}(3-\sqrt{3})l = 0{,}4226l$ liegt. Das Normalmoment wird in diesem Falle nach 138:

$$147.\quad M_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}Gl = 0{,}0963\,Gl.$$

a) **Transversalkräfte.** Für die Lage der Last im I. Felde wird nach 130, wenn wir $\xi = x$, $\xi_1 = l - x$ setzen,

$$148.\quad \begin{cases} max(+Q) = +\frac{1}{4}G\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(4-\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right), \\ max(-Q) = -\frac{1}{4}G\frac{x}{l}\left(5-\frac{x^2}{l^2}\right). \end{cases}$$

Für das positive Maximum darf das II. Feld nicht belastet sein; für das negative Maximum dagegen ist dasselbe bei $\xi = 0{,}4226l$ zu belasten. Für diese letztere Belastung wird im I. Felde $Q = -\frac{M_1}{l}$, d. i.

$$148a.\quad Q = -0{,}0963\,G.$$

Sollte nun aber der Abstand der Lasten im I. und II. Felde, d. i. $l - x + 0{,}4226l = 1{,}423l - x > e$ sein, so würde die Last im II. Felde bei $\xi = e - (l - x)$ anzunehmen sein. Alsdann würde nach 129: $M_1 = \frac{G\xi\xi_1(2l-\xi)}{4l^2}$ und $Q = \frac{M_1}{l}$.

b) **Momente.** Für das I. Feld wird für $max(+M)$ nach 137:

$$149.\quad \xi = l\sqrt{\frac{5x-4l}{3x}}.$$

Für die blosse Belastung des I. Feldes wird nach 138 und 139:

$$150. \begin{cases} max\,(+M) = +\frac{1}{6}\,G\sqrt{\frac{(5x-4l)^3}{3x}}, \\ max\,(-M) = -\frac{1}{4}\,Gl\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(4-\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right). \end{cases}$$

Für das negative Maximum darf das II. Feld nicht belastet sein; für das positive Maximum ist das II. Feld bei $\xi = 0{,}4226\,l$ belastet anzunehmen. Für diese letztere Belastung wird im I. Felde $Q = -0{,}0963\,G$, also

$$150a. \quad M = +0{,}0963\,Gx.$$

Zum absoluten positiven Maximum wird M, wenn in jedem Felde eine Last im Abstande $0{,}4226\,l$ von der Mittelstütze liegt; dasselbe ist $Max\,(+M) = 2\,.\,0{,}0963\,G = 0{,}1962\,Gl$. Ist $e > 0{,}8452\,l$, so würde der Abstand der Lasten von der Mittelstütze $= \frac{1}{2}\,e$ anzunehmen sein. Alsdann würde

$$151. \quad Max\,(+M) = +\frac{1}{16}\,Gl\frac{e}{l}\left(2-\frac{e}{l}\right)\left(4-\frac{e}{l}\right).$$

Zum absoluten negativen Maximum wird M für $2l^3 - 5l^2x + 2x^3 = 0$, d. i. für $x = 0{,}4323\,l$ und zwar ist

$$151a. \quad Max\,(-M) = -0{,}2074\,Gl.$$

c) **Stützendruck.** Der Druck auf eine äussere Stütze wird zum Maximum, wenn die Last unmittelbar über der Stütze liegt und ist alsdann $= G$; eine Belastung des nächsten Feldes darf nicht stattfinden. Ist nur das erste Feld belastet, so ist $Q_1' = G\frac{\xi_1}{l} - \frac{M_1}{l}$, $Q_1'' = Q_1' - G = -G\frac{\xi}{l} - \frac{M_1}{l}$; ferner ist $Q_2' = \frac{M_1}{l}$ und nun ist der Stützendruck D_1 auf die Mittelstütze $D_1 = Q_2' - Q_1''$, d. i. $D_1 = G\frac{\xi}{l} + \frac{2M_1}{l}$. Nun aber ist nach 129 $M_1 = \frac{G\xi\xi_1(l+\xi)}{4l^2}$, also

$$D_1 = \frac{1}{2}\,G\,\frac{\xi}{l}\left(3-\frac{\xi^2}{l^2}\right).$$

Zum Maximum wird hiernach D_1 für $\xi = l$, d. i., wenn die Last unmittelbar über der Mittelstütze liegt. Liegt in beiden Feldern eine Last G, wobei beide Lasten den Abstand e haben, so wird

$$D_1 = \frac{1}{2}\,G\,\frac{\xi}{l}\left(3-\frac{\xi^2}{l^2}\right) + \frac{1}{2}\,G\frac{\xi_1'}{l}\left(3-\frac{\xi_1'^2}{l^2}\right),$$

wobei ξ_1' den Abstand der Last im II. Felde von der rechten Stütze bedeutet. Differenziirt man nach ξ und ξ_1' und setzt dabei $d\xi_1' = -d\xi$, so ergiebt sich, wenn man den Differenzialquotienten Null setzt, $\xi = \xi_1'$. Dafür wird

$$152. \quad D_1 = G\frac{\xi}{l}\left(3 - \frac{\xi^2}{l^2}\right) = 2G\left(1 - \frac{e}{2l}\right)\left(1 + \frac{e}{2l} - \frac{e^2}{8l^2}\right).$$

Ist $e > 1{,}2946\,l$, so ergiebt sich hiernach $D_1 > G$; ist dagegen $e > 1{,}2946\,l$, so wird hiernach $D_1 < G$, so dass in diesem Falle der Stützendruck am grössten würde, wenn eine Last unmittelbar über der Stütze liegt.

§. 78. Träger mit unendlich vielen Feldern. Es kommen mehrere Fälle vor, zu denen namentlich die Eisenbahnschienen und Schwellenträger der Brücken gehören, bei denen die Anzahl der Felder so gross ist, dass dieselbe, wenn sie eben nur sehr gross angenommen wird, fast ohne Einfluss ist. Wir wollen daher, um für derartige Fälle eine hinreichend genaue Grundlage zu gewinnen, noch den Fall untersuchen, in welchem die Anzahl der Felder unendlich gross ist.

Wir denken uns nun zunächst ein beliebiges, das r^{te} Feld, belastet; die Normalgleichungen sind alsdann:

$$\begin{aligned}
4M_1 + M_2 &= 0,\\
M_1 + 4M_2 + M_3 &= 0,\\
&\ldots\ldots\\
M_{r-2} + 4M_{r-1} + M_r &= \mathfrak{R}' = G\frac{\xi\xi_1(2l-\xi)}{l^2},\\
M_{r-1} + 4M_r + M_{r+1} &= \mathfrak{R}'' = G\frac{\xi\xi_1(l+\xi)}{l^2},\\
M_r + 4M_{r+1} + M_{r+2} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die aufeinander folgenden Normalmomente $M_1, M_2 \ldots$ verhalten sich hiernach wie $-1, +4, -15, +56\ldots$, welche Zahlen wir die Clapeyron'schen Zahlen genannt haben (siehe des Verfassers Lehre von der Elasticität und Festigkeit, S. 120 etc.). Ist die r^{te} Clapeyron'sche Zahl $= c_r$, so ist $M_{r-2} = c_{r-2}M_1$, $M_{r-1} = c_{r-1}M_1$. Aus den Normalgleichungen von der $(r+1)^{sten}$ an folgt ferner, dass das Verhältniss jeder zweier auf einander folgenden Momente auf der rechten Seite des belasteten Feldes $= -(2-\sqrt{3}) = -0{,}2680$ ist. Wir bezeichnen diese Zahl mit k; alsdann ist $M_{r+1} = -kM_r$. Dies in die beiden mittleren Gleichungen gesetzt, giebt

$$a. \quad \begin{cases} -c_r M_1 + M_r = \mathfrak{R}'.\\ c_{r-1}M_1 + (4-k)M_r = \mathfrak{R}''.\end{cases}$$

Die Auflösung giebt:

$$[(2+\sqrt{3})\,c_r + c_{r-1}]\,M_1 = (2+\sqrt{3})\,\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}''.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(2-\sqrt{3})\,c_r + c_{r-1}$, so erhält man links als Factor von M_1 $c^2_{r-1} + 2c_{r-1}c_r + c^2_r$, d. i. aber $=1$ (siehe das citirte Werk, S. 122, Formel 176); mithin wird

$$153.\quad M_1 = [(2-\sqrt{3})\,c_r + c_{r-1}]\,[(2+\sqrt{3})\,\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}'']$$
$$= [(2-\sqrt{3})\,c_r + c_{r-1}]\,[(3+2\sqrt{3})\,l - (3+\sqrt{3})\,\xi]\,\frac{G\xi\xi_1}{l^2}.$$

Hiernach wird M_1, somit auch $M_2, M_3, \ldots M_{r-1}$ zum Maximum für

$$154.\quad \xi = \tfrac{1}{6}(3+\sqrt{3}-\sqrt{6})\,l = 0{,}3804\,l,$$

und zwar wird

$$155.\quad max\,M_1 = \tfrac{1}{6}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\,[c_{r-1} + (2-\sqrt{3})\,c_r]\,Gl$$
$$= 1{,}0993\,(c_{r-1} + 0{,}2680\,c_r)\,Gl.$$

Ist in dieser Weise das 3te, $5^{te}, \ldots$ Feld belastet, so wird nach vorstehender Gleichung

$$M_1 = 1{,}0993\,[(c_2 + c_4 + c_6 + \ldots + (2-\sqrt{3})\,(c_3 + c_5 + \ldots)]\,Gl.$$

Die in der Parenthese stehende unendliche Reihe ergiebt sich leicht durch Berechnung einiger der schnell convergirenden Glieder $c_2 + (2-\sqrt{3})c_3$, $c_3 + (2-\sqrt{3})\,c_4$, u. s. w. Durch analytische Summirung ergiebt sich (siehe das citirte Werk, S. 122) als Parenthese $2 - \frac{7}{6}\sqrt{3} = -0{,}02078$, also

$$156.\quad M_1 = -\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{6}) - 9(1+\sqrt{2})}{36}\,Gl = -0{,}02277\,Gl.$$

Ist dagegen das 2te, $4^{te} \ldots$ Feld belastet, so wird

$$M_1 = 1{,}0993\,[(c_1 + c_3 + c_5 + \ldots) + (2-\sqrt{3})\,(c_2 + c_4 + \ldots)]\,Gl.$$

Die Summirung ergiebt (siehe das citirte Werk, Seite 122) als Parenthese $\frac{1}{6}(2\sqrt{3}-3) = 0{,}07735$, mithin wird

$$157.\quad M_1 = +\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{36}\,Gl = +0{,}08503\,Gl.$$

Ist das belastete Feld ein mittleres Feld, so gehen die beiden mittleren Normalgleichungen, weil $M_{r-2} = -kM_{r-1}$, $M_{r+1} = -kM_r$ ist, über in

$$(4-k)\,M_{r-1} + M_r = \mathfrak{R}',$$
$$M_{r-1} + (4-k)\,M_r = \mathfrak{R}''.$$

Die Auflösung giebt, wenn man für k, $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ die Werthe einsetzt,

$$M_{r-1} = \frac{G\xi\xi_1\,[l - (\sqrt{3}-1)\,\xi]}{2l^2},\quad M_r = \frac{G\xi\xi_1\,[(2-\sqrt{3})\,l + (\sqrt{3}-1)\,\xi]}{2l^2}.$$

M_{r-1} wird zum Maximum für

$$158. \quad \xi = \frac{3 + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} l = 0{,}3804\, l,$$

und zwar ist

$$159. \quad M_{r-1} = \frac{3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}}{36} Gl = 0{,}08503\, Gl.$$

Ist nun das r^{te}, $(r+2)^{te}$, $(r+4)^{te}$, ... Feld bei $\xi = 0{,}3804\, l$ belastet, so ist, wenn wir $0{,}08503 = \varkappa$ setzen, in Folge der Belastung des r^{ten} Feldes $M_{r-1} = \varkappa\, Gl$, in Folge der Belastung des $(r+2)^{ten}$ Feldes $M_{r+1} = \varkappa\, Gl$, $M_r = -kM_{r+1} = -k\varkappa\, Gl$, $M_{r-1} = -kM_r = k^2 \varkappa\, Gl$ u. s. f., mithin wird

$$M_{r-1} = \varkappa\,(1 + k^2 + k^4 + \ldots)\, Gl = \frac{\varkappa\, Gl}{1 - k^2}.$$

Die Einsetzung von k und $\varkappa$ giebt

$$160. \quad M_{r-1} = + \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{72} Gl = + 0{,}09161\, Gl.$$

Ist dagegen das $(r+1)^{ste}$, $(r+3)^{te}$, $(r+5)^{te}$, ... Feld belastet, so ergiebt sich in gleicher Weise $M_r = 0{,}09161\, Gl$ und $M_{r-1} = -kM_r$, d. i.

$$161. \quad M_{r-1} = - \frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{72} Gl = - 0{,}02455\, Gl.$$

Setzt man in den Gleichungen $a: M_r = \frac{1}{c_{r-1}} M_{r-1}$, so erhält man die beiden Gleichungen: $-\frac{c_r}{c_{r-1}} M_1 + M_r = \mathfrak{N}'$ und $M_{r-1} + (4 - k)\, M_r = \mathfrak{N}''$. Der Vergleich mit den Gleichungen 44 (Seite 66) zeigt, dass hier $\mu = -\frac{c_r}{c_{r-1}}$, $\nu = 4 - k$, also $a = \frac{l}{1+\mu}$ und $b = \frac{l}{1+\nu}$ oder

$$162. \quad a = \frac{c_{r-1}}{c_{r-1} - c_r} l, \quad b = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} l = 0{,}2113\, l$$

zu setzen ist. Hiernach wird $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{c_1}{c_1 - c_2} l = \frac{-1}{-1-4} l = \frac{1}{5} l$, $a_3 = \frac{c_2}{c_2 - c_3} l = \frac{4}{4+15} l = \frac{4}{19} l$ u. s. w.

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Bestimmung der grössten Transversalkräfte, Momente und Stützendrücke übergehen. Es reicht für die Anwendung aus, wenn wir nur das erste und ein mittleres Feld untersuchen, wobei wir im zweiten Falle voraussetzen, dass auf beiden Seiten dieses mittleren Feldes unendlich viele Felder liegen.

1. **Transversalkräfte.** Nach 130 ergiebt sich für die Belastung des fraglichen Feldes:

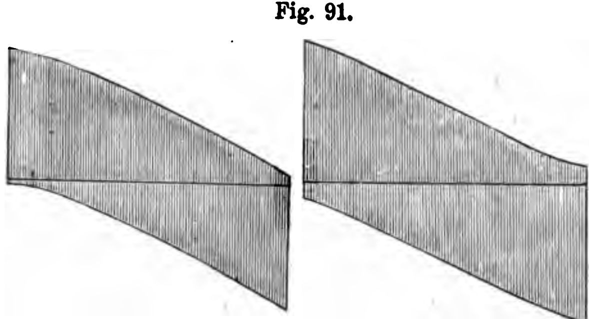
$$163. \begin{cases} I.\ Feld\ldots \begin{cases} max\,(+Q) = +\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[1-0{,}2679\frac{x}{l}\left(1+\frac{x}{l}\right)\right]G, \\ max\,(-Q) = -\frac{x}{l}\left(1{,}2679-0{,}2679\frac{x^2}{l^2}\right)G; \end{cases} \\ Mittl.\ Feld \begin{cases} max\,(+Q) = +\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(1+0{,}3661\frac{x}{l}-0{,}7321\frac{x^2}{l^2}\right)G, \\ max\,(-Q) = -\frac{x}{l}\left(0{,}6340-1{,}0980\frac{x}{l}-0{,}7321\frac{x^2}{l^2}\right)G. \end{cases} \end{cases}$$

Hierzu kommt nun noch die Transversalkraft, welche durch die Belastung der übrigen Felder erzeugt wird. Für die Transversalkraft im I. Felde muss noch für $max\,(+Q)$ das 3te, 5te, ... Feld, für $max\,(-Q)$ das 2te, 4te, ... Feld belastet sein. Für diese Belastung wird $Q = -\frac{M_1}{l}$, d. i. nach 156 und 157:

$$163a.\quad I.\ Feld. \begin{cases} max\,(+Q) = +0{,}02277\,G, \\ max\,(-Q) = -0{,}08503\,G. \end{cases}$$

Für die Transversalkraft in einem mittleren (dem r^{ten}) Felde muss für $max\,(+Q)$ das $(r+2)^{te}$, $(r+4)^{te}$, ... $(r-1)^{ste}$, $(r-3)^{te}$, ... Feld und für $max\,(-Q)$ das $(r+1)^{ste}$, $(r+3)^{te}$, ... $(r-2)^{te}$, $(r-4)^{te}$, ... Feld belastet sein. Für die Belastung des $(r+2)^{ten}$, $(r+4)^{ten}$, ... Feldes wird nach 160 $M_{r+1} = 0{,}09161\,Gl$, $M_r = -kM_{r+1} = -0{,}02455\,Gl$, $M_{r-1} = -kM_r = +0{,}00656\,Gl$. Für die Belastung des $(r-1)^{sten}$, $(r-3)^{ten}$, ... Feldes wird ebenso $M_{r-1} = +0{,}09161\,Gl$, $M_r = -kM_{r-1} = -0{,}02455\,Gl$. Sonach wird für die Belastung des $(r+2)^{ten}$, $(r+4)^{ten}$, ... $(r-1)^{sten}$, $(r-3)^{ten}$, ... Feldes $M_{r-1} = +(0{,}00656+0{,}09161)\,Gl = +0{,}09817\,Gl$, $M_r = -(0{,}02455+0{,}02455)\,Gl = -0{,}04910\,Gl$. Es wird nun $Q = \frac{1}{l}(M_{r-1}-M_r) = 0{,}1473\,G$. Für die Belastung des $(r+1)^{sten}$, $(r+3)^{ten}$ ... $(r-2)^{ten}$, $(r-4)^{ten}$, ... Feldes wechseln M_{r-1} und M_r ihre Werthe. Sonach ist

Fig. 91.



Erstes Feld. *Mittleres Feld.*

$$163b.\quad Mittl.\ Feld. \begin{cases} max\,(+Q) = +0{,}1473\,G, \\ max\,(-Q) = -0{,}1473\,G. \end{cases}$$

In Fig. 91 ist hiernach $max\ Q$ graphisch dargestellt. Die absoluten Maxima von Q werden

$$164. \begin{cases} I.\ Feld \ldots\ Max\,(+Q) = 1{,}0228\,G, & Max\,(-Q) = 1{,}0850\,G, \\ Mittl.\ Feld.\ Max\,(+Q) = 1{,}1473\,G, & Max\,(-Q) = 1{,}1473\,G. \end{cases}$$

Untersucht man in gleicher Weise auch noch die übrigen Felder, so findet man, dass das Maximum Maximorum der Transversalkräfte im II. Felde an der Stütze 1 entsteht; dasselbe ist $1{,}1624\ G$.

2. **Negative Momente.** Das negative Maximum von M, welches durch die Last im fraglichen Felde entsteht, ist durch die Gleichung 139 bestimmt. Hiernach ergiebt sich:

$$165. \begin{cases} I.\ Feld: \\ max\,(-M) = -\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[1-0{,}2679\frac{x}{l}\left(1+\frac{x}{l}\right)\right] G\,l, \\ Mittleres\ Feld: \\ max\,(-M) = -\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[0{,}5+0{,}7321\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right] G\,l. \end{cases}$$

Was nun die Belastung der übrigen Felder anbelangt, so wird zu nächst M im I. Felde zum negativen Maximum bei Belastung des 3ten, 5ten ... Feldes. Für diese Belastung wird nach 156 $M_1 = -0{,}0228\,G\,l$, also $Q = 0{,}0228\ G$ und:

$$165a.\quad I.\ Feld.\ max\,(-M) = -0{,}0228\,\frac{x}{l}\,G\,l.$$

In einem mittleren (dem r^{ten}) Felde wird M zum negativen Maximum für $x = 0$ bis $x = 0{,}2113\,l$ bei Belastung des $(r+1)^{sten}$, $(r+3)^{ten}$, ... $(r-2)^{ten}$, $(r-4)^{ten}$, ... Feldes und für $x = 0{,}2113\,l$ bis $x = 0{,}7887\,l$ bei Belastung des $(r+2)^{ten}$, $(r+4)^{ten}$, ... $(r-2)^{ten}$, $(r-4)^{ten}$ ... Feldes. Für diese Belastung wird nach dem für die Transversalkräfte Gefundenen: $M_{r-1} = -0{,}0491\,G\,l$, $M_r = +0{,}0982\,G\,l$; $M_{r-1} = M_r = -0{,}0179\,G\,l$. Es wird nun $Q = \frac{M_{r-1} - M_r}{l}$ und $M = M_{r-1} - Q\,l$, d. i.

$$165b.\quad Mittl.\ Feld. \begin{cases} x = 0 \text{ bis } 0{,}2113\,l: \\ max\,(-M) = -\left(0{,}0491 - 0{,}1473\,\frac{x}{l}\right) G\,l, \\ x = 0{,}2113\,l \text{ bis } 0{,}7887\,l: \\ max\,(-M) = -0{,}0179\,G\,l. \end{cases}$$

Von $x = 0{,}5$ bis $x = l$ ist eine Berechnung der Symmetrie wegen nicht nöthig.

Fügt man die Ausdrücke von M nach 165a, 165b zu den Ausdrücken 165 hinzu, so findet man, dass M zum absoluten negativen

Maximum im I. Felde für $x = 0{,}418\,l$, im mittleren Felde für $x = 0{,}500\,l$ wird und zwar ist

$$166.\quad \begin{cases} \textit{I. Feld} \ldots\ Max\,(-M) = -\,0{,}2142\,Gl, \\ \textit{Mittl. Feld}\ Max\,(-M) = -\,0{,}1888\,Gl. \end{cases}$$

Berechnet man in gleicher Weise auch noch die absoluten Maxima für die übrigen Felder, so findet man, dass das Maximum Maximorum im I. Felde stattfindet. Der Einfluss der Belastung der nicht fraglichen Felder beträgt im I. Felde *4,6*, in einem mittleren Felde *10,6* Procent.

3. **Positive Momente.** Nach 137 und 135 ergiebt sich für die Lage der Last im fraglichen Felde, für welche M zum positiven Maximum wird,

$$167.\quad \begin{cases} \textit{I. Feld} \ldots\ \textit{Rechter Theil:}\ \xi = l\sqrt{1{,}5774 - 1{,}2440\,\frac{l}{x}}, \\ \textit{Mittl. Feld. Linker Theil:} \\ \xi^2 - \frac{1{,}5774\,l - 2x}{l - 2x}\,l\xi + \frac{0{,}4554\,l + 0{,}5774\,x}{l - 2x}\,l^2 = 0. \end{cases}$$

Für die Maxima von M ergeben sich nach 138 und 136 folgende Ausdrücke:

$$168.\quad \begin{cases} \textit{I. Feld. Rechter Theil:} \\ max\,(+M) = +\,0{,}5358\,\frac{x\xi^3}{l^4}\,Gl, \\ \textit{Mittl. Feld. Linker Theil:} \\ max\,(+M) = +\,0{,}3660\left(0{,}2113 - \frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)\left(2{,}1547 - \frac{\xi}{l}\right)Gl. \end{cases}$$

Für das I. Feld muss ausserdem noch das 2te, 4te, ... Feld belastet sein. Für diese Belastung ist nach 159: $M_1 = 0{,}0850\,Gl$, mithin $Q = -\,0{,}0850\,G$ und

$$168a.\quad \textit{I. Feld.}\quad max\,(+M) = +\,0{,}0850\,\frac{x}{l}\,Gl.$$

Für ein mittleres (das r^{te}) Feld muss für den ersten Theil das $(r+2)^{te}$, $(r+4)^{te}$, ... $(r-1)^{ste}$, $(r-3)^{te}$ ... Feld, für den zweiten Theil das $(r+1)^{ste}$, $(r+3)^{te}$, ... $(r-1)^{ste}$, $(r-3)^{te}$, ... Feld belastet sein. Für diese Belastung ergiebt sich aus dem Vorigen bezüglich $M_{r-1} = +\,0{,}0982\,Gl$, $M_r = -\,0{,}0491\,Gl$; $M_{r-1} = M_r = +\,0{,}0671\,Gl$.

Es wird nun $max\,(+M) = M_{r-1} - (M_{r-1} - M_r)\,\frac{x}{l}$, d. i.

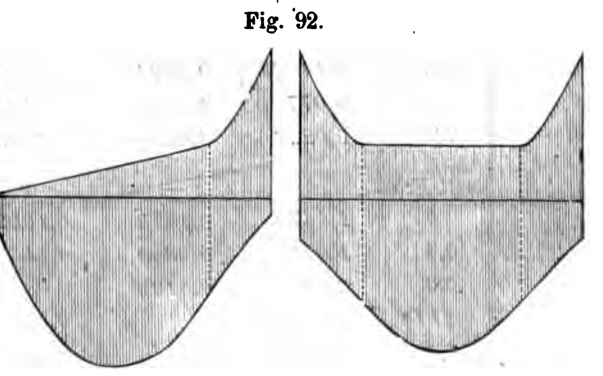
$$168b.\quad \textit{Mittl. Feld.} \begin{cases} \textit{Erster Theil:}\ max\,(+M) = +\left(0{,}0982 - 0{,}1473\,\frac{x}{l}\right)Gl, \\ \textit{Zweit. Theil:}\ max\,(+M) = +\,0{,}0671\,Gl. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich als absolute positive Maxima:

$$169.\quad \begin{cases} \textit{Stütze 1:} & max\,(+M) = 0{,}1881\,Gl, \\ \textit{Mittl. Stütze:} & max\,(+M) = 0{,}1832\,Gl. \end{cases}$$

Das erste dieser Maxima ist gleichzeitig das positive Maximum Maximorum. Die absoluten positiven Maxima sind hiernach den absoluten negativen Maximen fast gleich. In Fig. 92 ist *max M* graphisch dargestellt.

Fig. 92.



Erstes Feld. *Mittleres Feld.*

Wir haben hierbei stets vorausgesetzt, dass der kleinste Radstand für die Stütze 1 mindestens $= 0{,}8030\,l$, für eine mittlere Stütze mindestens $= 0{,}7608\,l$ ist. Bei grösseren Minimalradständen ändern sich die absoluten negativen Maxima nicht, während die absoluten positiven Maxima nach 142 bis 145 zu bestimmen sind. Für das Moment an einer mittleren Stütze ergiebt sich nach 145 für die beiden neben dieser Stütze liegenden Lasten $M = \frac{1}{8}\frac{e}{l}\left(2 - \frac{e}{l}\right)\left[2 - \left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{e}{l}\right] Gl$; für die Belastung der übrigen Felder ergiebt sich leicht $M = 0{,}0132\,Gl$; sonach ist

$$170.\quad Max\,(+M) = +\left[\frac{1}{8}\frac{e}{l}\left(2 - \frac{e}{l}\right)\left(2 - 0{,}7321\frac{e}{l}\right) + 0{,}0132\right] Gl;$$

wornach sich beispielsweise für $e = 0{,}6\,l,\ 0{,}761\,l,\ 0{,}8\,l,\ l,\ 1{,}2\,l,\ 1{,}4\,l$ bezüglich $max\,(+M) = 0{,}1771,\ 0{,}1829,\ 0{,}1832,\ 0{,}1829,\ 0{,}1717,\ 0{,}1478,\ 0{,}1156\,.\,Gl$ ergiebt.

Nach den aufgestellten Formeln ist für die Maxima von Q und M die folgende Tabelle berechnet, wobei eine Beschränkung des Radstandes nicht vorausgesetzt ist.

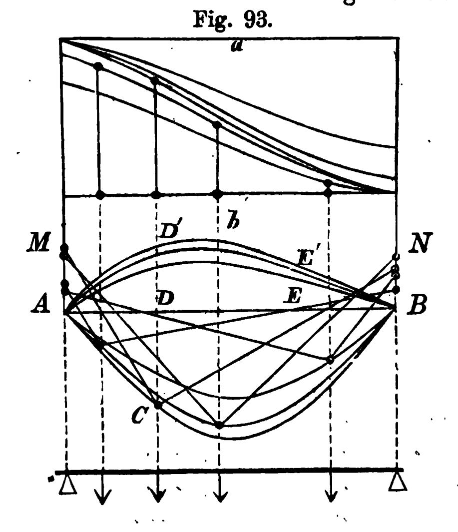
λ	*Transversalkraft*		*Moment*	
	max $(+Q)$	*max* $(-Q)$	*max* $(+M)$	*max* $(-M)$
I. Feld	+	—	+	—
0	*1,0228*	*0,0850*	*0*	*0*
0,1	*0,8963*	*0,2115*	*0,0085*	*0,0896*
0,2	*0,7713*	*0,3364*	*0,0170*	*0,1543*
0,3	*0,6496*	*0,4185*	*0,0255*	*0,1949*
0,4	*0,5328*	*0,5750*	*0,0340*	*0,2131*
0,5	*0,4223*	*0,6855*	*0,0425*	*0,2112*

λ	Transversalkraft		Moment	
	$max\,(+Q)$	$max\,(-Q)$	$max\,(+M)$	$max\,(-M)$
I. Feld	+	—	+	—
0,6	0,3199	0,7879	0,0510	0,1919
0,7	0,2271	0,8806	0,0595	0,1590
0,7887			0,0670	0,1216
0,8	0,1456	0,9621	0,0694	0,1165
0,9	0,0770	1,0308	0,1181	0,0693
1,0	0,0228	1,0850	0,1382	0,0228
Mttl. Feld	+	—	+	—
0	1,1473	0,1473	0,1332	0,0490
0,1	1,0737	0,2209	0,1137	0,0852
0,2	0,9825	0,3122	0,0695	0,1183
0,2113			0,0671	0,1216
0,3	0,8781	0,4166	0,0671	0,1552
0,4	0,7649	0,5297	0,0671	0,1800
0,5	0,6473	0,6473	0,0671	0,1887
. l	. G		. Gl	

§. 79. Belastung durch ein System von Einzellasten.

1. Belastung des fraglichen Feldes. Die Transversalkräfte, Momente und Stützendrücke für eine bestimmte Lage des Systemes der Einzellasten lassen sich durch Anwendung der Formeln 130 bis 139 für jede einzelne Last und Addition der Resultate leicht bestimmen. Am schnellsten aber gelangt man zum Ziele mit Zuhülfenahme einer graphischen Darstellung. Am besten berechnet man für eine einzige Einzellast G das Q' und Q'' nach den Formeln 130, sowie M' und das Moment M am Angriffspunkte der Last nach Formel 129 und 139 für verschiedene Lagen der Last in der Form $Q' = A'\,G$, $Q'' = A''\,G$, $M' = B'\,Gl$, $M = B\,Gl$. Man setzt nun für G die Zahlenwerthe, welche den vorhandenen Einzellasten entsprechen, ein und stellt das Resultat durch Curven dar (Fig. 93). Wir unterscheiden nun:

Fig. 93.



a) **Transversalkräfte.** Die in §. 13 (Seite 15) gemachten Schlüsse in Betreff der gefährlichsten Belastungsweise behalten auch hier ihre volle Gültigkeit. Hiernach wird Q zum positiven und negativen Maximum werden, je nachdem der Zug vom fraglichen Querschnitte aus sich nach rechts oder links erstreckt, wobei das erste Rad unmittelbar neben dem fraglichen Querschnitte liegt; nur wenn ein Rad mit kleinem Drucke vorausschreitet, so kann erst das nächste Rad am fraglichen Querschnitte liegen müssen. Da man somit die gefährlichste Lage des Systemes von Einzellasten von vorneherein angeben kann, so ist es sehr leicht, mit Hülfe der graphischen Darstellung (Fig. 93 *a*) die Transversalkraft für jede einzelne Last zu ermitteln; die Summirung geschieht am besten ebenfalls mit Hülfe des Zirkels.

b) **Negative Momente.** Bestimmt man das Moment für irgend einen fest angenommenen Querschnitt bei verschiedenen Lagen des Systemes der Einzellasten und stellt dasselbe als Ordinate dar, welche in der Richtung irgend einer der Einzellasten liegt, so erhält man eine Linie, welche aus einzelnen nach oben convex gekrümmten Theilen besteht (Fig. 94). Die Ecken entsprechen denjenigen Lagen, bei denen eine Last am Querschnitte liegt. Hieraus folgt ohne Weiteres, dass das Moment nur zum negativen Maximum werden kann, wenn eine der Einzellasten am fraglichen Querschnitte liegt. Welche der Einzellasten nun am fraglichen Querschnitte liegen müsse, lässt sich von vornherein nicht mit Bestimmtheit angeben. Jedenfalls müssen die schweren Lasten dem Querschnitte möglichst nahe liegen. Auch die für Einzelträger in §. 14 (Seite 19) ermittelte Näherungsregel kann man hier mit Nutzen verwenden.

Fig. 94.

Liegt eine Einzellast in D (Fig. 93), so ist das Normalmoment in $A = DD'$, in $B = EE'$, wenn man $BE = AD$ macht, und das Moment in D selbst $= DC$. Macht man nun $AM = DD'$, $BN = EE'$ und zieht die Geraden MC und NC, so stellen dieselben die Momente in den einzelnen Querschnitten dar. Somit ist es mit Hülfe der graphischen Darstellung sehr leicht, das Moment bei irgend einem Querschnitte für irgend eine der Einzellasten zu bestimmen. Man kann sonach auch das Moment für das ganze System der Einzellasten bei einigen verschiedenen Lagen desselben, wobei aber immer eine Einzellast am fraglichen Querschnitte liegt, leicht bestimmen und so das wirkliche negative Maximum von M leicht finden.

c) **Positive Momente.** Diejenige Lage des Systemes der Einzellasten, für welche M zum positiven Maximum wird, lässt sich schwieriger angeben. Es würde sich zwar ein analytischer Ausdruck hierfür entwickeln lassen, jedoch erscheint es wesentlich einfacher, das Moment für einige Lagen des Systemes zu bestimmen und dasselbe an der einen der Lasten, etwa an der vorderen, als Ordinate darzustellen. Durch die Verbindung durch eine Curve erhält man die ungünstigste Lage und das positive Maximum von M. Die genauere Bestimmung des Maximums aus drei Ordinaten ist im Anhange gezeigt.

Ungefähr lässt sich die ungünstigste Lage nach den für eine gleichmässige Belastung gültigen Regeln von vorneherein bestimmen. Für den über einer Stütze liegenden Querschnitt muss das ganze Feld belastet sein; je weiter aber der Querschnitt nach dem nächsten Fixpunkte hin rückt, desto näher rückt der Kopf des Zuges dem andern Ende des Feldes, wobei der Kopf des Zuges dem fraglichen Querschnitte zugekehrt ist und sich die schweren Lasten am Kopfe befinden müssen.

2. **Belastung der übrigen Felder.** Aus dem in §. 76 Gesagten geht hervor, dass diejenigen Felder, welche belastet sein müssen, damit Q, M und D zu einem Maximum werden, durch dieselbe Regel bestimmt sind, wie für eine gleichmässige Belastung, dass also diese Felder durch die in §. 47, 49 und 50 aufgestellten Regeln bestimmt sind. Aus §. 76 geht aber auch hervor, dass jedes dieser Felder derart belastet sein muss, dass das Normalmoment an dem dem fraglichen Felde zugekehrten Ende des belasteten Feldes zu einem Maximum werde.

Bestimmt man dieses Maximum nach dem vorigen §, so lässt sich hieraus leicht auf die Normalmomente M' und M'' des fraglichen Feldes und hieraus leicht auf die Q und M im fraglichen Felde schliessen. Es ist nämlich

$$171. \quad Q = \frac{M' - M''}{l}, \quad M = M' - (M' - M'')\frac{x}{l}.$$

Von dieser Regel kann allerdings eine Ausnahme für das dem fraglichen Felde zunächst liegende Feld zu machen sein, wenn es sich um die Transversalkräfte und Momente für die zwischen diesen beiden Feldern liegende Stütze oder für die dieser Stütze benachbarten Querschnitte handelt, weil sich Züge in den beiden Feldern nach der eben gegebenen Regel so nahe rücken können, wie es in Wirklichkeit nicht vorkommen kann. Alsdann bleibt nichts übrig, als das System von Einzellasten über beide Felder hinweg anzunehmen und für einzelne Lagen des Systemes das Q und M zu bestimmen.

Was den Stützendruck anbelangt, so ergiebt sich derselbe am grössten, wenn die beiden Felder neben der fraglichen Stütze und die übrigen abwechselnd belastet sind. Betrachtet man jedes Feld einzeln, so wird

der Stützendruck zum Maximum, wenn eine Last unmittelbar neben der Stütze liegt; da nun aber nicht in jedem der beiden Felder eine Last neben der Stütze liegen kann, so muss man auch hier annehmen, dass sich das System von Einzellasten über beide Felder hinweg erstrecke, und für einzelne Lagen des Systemes den Stützendruck bestimmen.

§. **80. Beispiel.** Zur weiteren Erläuterung behandeln wir als Beispiel einen continuirlichen Träger mit 3 Feldern von *10, 12, 10 Met.* Spannweite. Das System von Einzellasten sei das durch Fig. 16 (Seite 9) dargestellte.

1. **Vorbereitungen.** Nach §. 52 wird $a_1 = 0$, $b_1 = \frac{55}{279} l_1 = 0{,}1971\, l_1$, $c_1 = 0{,}8029\, l_1$ und $a_2 = b_2 = \frac{3}{14} l = 0{,}2143\, l$, $c_2 = 0{,}5714\, l$. Nach Formel 129 wird daher für die Belastung des ersten Feldes durch eine Einzellast

$$M_1 = 0{,}2455 \frac{\xi}{l_1} \left(1 - \frac{\xi^2}{l_1^2}\right) G l_1$$

und für die Belastung des zweiten Feldes

$$M_1 = 0{,}375 \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \left(1{,}3571 - \frac{\xi}{l}\right) G l.$$

Hiernach ist folgende Tabelle für M_1 berechnet:

x	M für d. Belastung d. I. Feldes				x	M für d. Belastung d. II. Feldes			
		13 T.	12 T.	9 T.			13 T.	12 T.	9 T.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,0248	3,16	0,92	2,19	0,1	0,0424	6,62	6,11	4,58
0,2	0,0472	6,13	5,66	4,24	0,2	0,0694	10,83	10,00	7,50
0,3	0,0670	8,71	8,04	6,03	0,3	0,0832	12,99	11,99	8,99
0,4	0,0825	10,73	9,90	7,43	0,4	0,0862	13,44	12,41	9,30
0,5	0,0921	11,97	11,05	8,29	0,5	0,0804	12,53	11,57	8,68
0,6	0,0943	12,25	11,31	8,49	0,6	0,0682	10,63	9,81	7,36
0,7	0,0877	11,39	10,52	7,89	0,7	0,0517	8,07	7,45	5,59
0,8	0,0707	9,19	8,49	6,36	0,8	0,0326	5,09	4,70	3,52
0,9	0,0420	5,46	5,04	3,79	0,9	0,0157	2,41	2,22	1,67
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$. l_1$	$. G l_1$	Tonnen-Meter			$. l$	$. G l$	Tonnen-Meter		

Das Normalmoment M_2 für die Belastung des zweiten Feldes bei ξ ist der Symmetrie wegen eben so gross als M_1 für die Belastung bei $l \rightarrow \xi$.

Die Transversalkräfte Q_1' und Q_2' auf der linken Seite der Last berechnet man jetzt am besten nach den Formeln:

$$Q_1' = \frac{G(l_1 - x)}{l_1} - \frac{M_1}{l_1}, \quad Q_2' = \frac{G(l-x)}{l} + \frac{M_1 - M_2}{l}.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

x	Q_1' für d. Belastung d. I. Feldes				x	Q_2' für d. Belastung d. II. Feldes			
		13 T.	12 T.	9 T.			13 T.	12 T.	9 T.
0	1	13,00	12,00	9,00	0	1	13,00	12,00	9,00
0,1	0,8757	11,38	10,51	7,89	0,1	0,9270	12,05	11,12	8,34
0,2	0,7543	9,81	9,05	6,79	0,2	0,8337	10,84	10,00	7,50
0,3	0,6330	8,22	7,60	5,70	0,3	0,7315	9,51	8,78	6,58
0,4	0,5175	6,73	6,21	4,66	0,4	0,6180	8,03	7,42	5,56
0,5	0,4079	5,30	4,89	3,67	0,5	0,5000	6,50	6,00	4,50
0,6	0,3057	3,97	3,67	2,75	0,6	0,3820	4,97	4,58	3,44
0,7	0,2102	2,73	2.52	1,89	0,7	0,2685	3,49	3,22	2,42
0,8	0,1322	1,72	1,59	1,19	0,8	0,1662	2,16	1,99	1,50
0,9	0,0580	0,75	0,70	0,52	0,9	0,0730	0,95	0,88	0,66
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$.\, l_1$	$.\, G$	Tonnen			$.\, l$	$.\, G$	Tonnen		

Die Momente M_1' und M_2' am Angriffspunkte der Last sind nun

$$M_1' = - Q_1'x, \quad M_2' = M_1 - Q_2'x.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

x	Belastung d. I. Feldes. M_1'.				x	Belastung d. II. Feldes. M_2'.			
		13 T.	12 T.	9 T.			13 T.	12 T.	9 T.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,0876	11,39	10,51	7,88	0,1	0,0503	7,84	7,24	5,43
0,2	0,1509	19,62	18,11	13,58	0,2	0,0973	15,18	14,01	10,51
0,3	0,1899	24,69	22,79	17,19	0,3	0,1362	21,25	19,61	14,71
0,4	0,2070	26,91	24,84	18,63	0,4	0,1610	25,12	23,19	17,39
0,5	0,2040	26,52	24,48	18,36	0,5	0,1696	26,47	24,43	18,32
0,6	0,1834	23,84	22,01	16,51	0,6	0,1610	25,12	23,19	17,39
0,7	0,1471	19,12	17,65	13,24	0,7	0,1362	21,25	19,61	14,71
0,8	0,1058	13,75	12,70	9,52	0,8	0,0973	15,18	14,01	10,51
0,9	0,0522	6,79	6,26	4,70	0,9	0,0503	7,84	7,24	5,43
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$.\, l_2$	$.\, G l_1$	Tonnen-Meter			$.\, l$	$.\, G l$	Tonnen-Meter		

Hiernach ist auf Tafel II die graphische Darstellung von Q_1', Q_2', M_1, M_1' und M_2' erfolgt. Anstatt diese Grössen für die verschiedenen Lasten (13, 12 und 9 Tonnen) auszurechnen, könnte man direct die entsprechenden Coefficienten von G, $G l_1$ und $G l$ nach verschiedenen Massstäben auftragen.

2. **Momente.** *a*) Belastung des fraglichen Feldes. Nach dem im vorigen §. Gesagten kann nun mit Hülfe der verzeichneten Curven ohne Weiteres die Bestimmung von *max* (+ *M*) und *max* (— *M*) erfolgen. Um die Lage der Einzellasten für jede Lage des Systemes leicht markiren zu können, wurde die Entfernung der Lasten auf einem besonderen Papierstreifen aufgetragen (Taf. II.). Das Resultat ist folgendes:

x	I. Feld		x	II. Feld	
	max (+ *M*)	*max* (— *M*)		*max* (+ *M*)	*max* (— *M*)
	+	—		+	—
0	—	0	0	42,1	0
0,1	—	29,3	0,1	12,8	2,6
0,2	—	44,9	0,2	0,4	30,5
0,3	—	58,2	0,3	—	49,9
0,4	—	63,0	0,4	—	60,0
0,5	—	60,6	0,5	—	61,8
0,6	—	54,6	0,6	—	60,0
0,7	—	42,6	0,7	—	49,9
0,8	—	25,8	0,8	0,4	35,3
0,9	10,8	1,8	0,9	12,8	2,6
1	34,8	0	1	42,1	0
$. l_1$	Tonnen-Meter		$. l$	Tonnen-Meter	

Für *max* (— *M*) muss für $x = 0{,}1 l_1$ und $0{,}9 l_1$, resp. $0{,}1 l$ und $0{,}9 l$ die Last I. (12 Tonnen) am Querschnitte liegen; bei allen übrigen Querschnitten dagegen muss die Last II (13 Ton.) am Querschnitte liegen.

b) Belastung der übrigen Felder. Für die positiven Momente im I. Felde muss das II. Feld belastet sein und zwar so, dass M_1 ein Maximum wird. Dieses Maximum von M_1 ist nach vorstehender Tabelle $= 42{,}1$, folglich wird für diese Belastung

$$M = 42{,}1 \frac{x}{l_1}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Züge in beiden Feldern mit der Brust einander zugekehrt sind. Für den Querschnitt an der Stütze 1 selbst erhalten die Lasten I in beiden Feldern einen Abstand von $4{,}3^m$,

während dieser Abstand nach dem angenommenen Systeme nicht kleiner als $5{,}4^m$ werden kann. Erstreckt man das System der Einzellasten über beide Felder, wobei zwei Locomotiven Brust an Brust stehen, so ergiebt sich $max\, M_1 = 76{,}2$, während bei unabhängiger Behandlung beider Felder $max\, M_1 = 34{,}8 + 42{,}1 = 76{,}9$ werden würde, so dass der Unterschied nicht gross ist.

Für die negativen Momente im I. Felde muss das II. Feld so belastet sein, dass M_2 zum Maximum wird. Nach vorstehender Tabelle ist $max\, M_1 = 34{,}8$. Da nun, falls nur das III. Feld belastet ist, $2 M_2 (l_1 + l) + M_2 l = 0$, d. i. $22 M_1 + 6 M_2 = 0$, also $M_1 = -\frac{3}{11} M_2$ wird, so wird $M_1 = -\frac{3}{11} . 34{,}8 = -9{,}49$, folglich

$$M = -9{,}5 \frac{x}{l_1}.$$

Für die positiven Momente im II. Felde muss für $x = 0$ bis $x = 0{,}214\, l$ das I. Feld so belastet sein, dass M_1 zu einem Maximum wird, und für $x = 0{,}214 l$ bis $x = 0{,}786 l$, das I. und III. Feld so, dass bezüglich M_1 und M_2 ein Maximum wird. Im I. Falle wird $M_1 = 34{,}8$, $M_2 = -\frac{3}{11} 34{,}8 = -9{,}5$, im II. Falle $M_1 = M_2 = 34{,}8 - 9{,}5 = 25{,}3$. Es wird nun $M = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l}$, d. i.

$$\begin{cases} x = 0 \text{ bis } 0{,}214 l: & M = 34{,}8 - 44{,}3 \frac{x}{l}, \\ x = 0{,}214 l \text{ bis } 0{,}786: & M = 25{,}3. \end{cases}$$

Für die negativen Momente im II. Felde muss für $x = 0$ bis $x = 0{,}214 l$ das III. Feld so belastet sein, dass M_2 ein Maximum wird; für $x = 0{,}214 l$ bis $x = 0{,}786 l$ darf weder das I., noch das III. Feld belastet sein. Im ersten Falle wird $M_2 = 34{,}8$, $M_1 = -\frac{3}{11} 34{,}8 = -9{,}5$, also

$$\begin{cases} x = 0 \text{ bis } 0{,}2214 l: & M = -9{,}5 + 44{,}3 \frac{x}{l}, \\ x = 0{,}214 \text{ bis } 0{,}786 l: & M = 0. \end{cases}$$

Fügt man nun die hiernach berechneten Momente den in vorigen Tabellen erhaltenen Momenten hinzu, so erhält man folgende Resultate:

$\frac{x}{l}$ $\frac{x}{l_1}$	*Bei Einzellasten*		*Bei gleichm. verth. Last*		*Aequivalente Last pro Meter, p für*	
	max (+ M)	*max (— M)*	*max (+ M)*	*max (— M)*	*max (+ M)*	*max (— M)*
I. Feld	+	—	+	—		
0	0	0	0	0	5,46	7,80
0,1	4,2	30.2	0,77	4,06	5,46	7,43
0,2	8,4	46,8	1,54	7,11	5,46	6,58
0,3	12,6	61,0	2,31	9,16	5,46	6,66
0,4	16,8	66,8	3,09	10,22	5,46	6,53
0,5	21,1	65,3	3,86	10,27	5,46	6,36
0,6	25,3	60,3	4,63	9,32	5,46	6,46
0,7	29,5	49,2	5,40	7,37	5,46	6,68
0,8	33,7	33,4	6,17	4,43	5,46	7,54
0,9	48,7	10,3	8,60	2,14	5,66	4,81
1	76.2	9,5	13,86	1,68	5,50	5,66
II. Feld	+	—	+	—		
1	76,2	9,5	13,86	1,68	5,50	5,66
0,1	43,2	7,7	7,44	1,74	5,81	4,35
0,2	26,3	30,9	4,60	3,94	5,72	7,84
0,3	25,3	49,9	4,46	7,41	5,67	6,73
0,4	25,3	60,0	4,46	9,57	5,67	6,27
0,5	25,3	61,8	4,46	10,29	5,67	6,01
	Tonnen - Meter		*. p Tonnen - Meter*		*Tonnen*	

3. **Transversalkräfte.** *a*) Belastung des fraglichen Feldes. Mit Hülfe der Curven für Q_1', Q_2' für eine Einzellast ergeben sich für das angenommene System von Einzellasten folgende Resultate:

x	*I. Feld*		*x*	*II. Feld*	
	max (+ Q)	*max (— Q)*		*max (+ Q)*	*max (— Q)*
	+	—		+	—
0	34,5	0	0	41,7	0
0,2	23,2	4,3	0,2	29,3	2,8
0,4	14,1	12,0	0,4	18,3	9,8
0,5	10,5	16,2	0,5	13,8	13,8
0,6	7,5	20,5	0,6	9,8	18,3
0,8	2,4	29,4	0,8	2,8	29,3
1	0	39,6	1	0	41,7
. l	*Tonnen*		*. l*	*Tonnen*	

b) **Belastung der übrigen Felder.** Für die positiven Transversalkräfte im I. Felde muss das III. Feld so belastet sein, dass M_2 ein Maximum wird. Für diese Belastung ist nach dem Obigen $M_2 = 34{,}8$, $M_1 = -\frac{3}{11}\, 34{,}8 = -9{,}49$, also $Q = -\frac{M_1}{l_1} = +\frac{9{,}49}{10}$, d. i.

$$Q = +\ 0{,}95 \text{ Tonnen.}$$

Für die negativen Transversalkräfte im I. Felde muss das II. Feld so belastet sein, dass M_1 zu einem Maximum wird. Für diese Belastung ist $M = 34{,}8$, also $Q = -\frac{M_1}{l_1} = -\frac{34{,}8}{10}$, d. i.

$$Q = -\ 3{,}48 \text{ Tonnen.}$$

Für die positiven Transversalkräfte im II. Felde muss das I. Feld so belastet sein, dass M_1 zu einem Maximum wird. Für diese Belastung ist $M_1 = +\ 34{,}8$, $M_2 = -\ 9{,}5$, also $Q = \frac{M_1 - M_2}{l} = \frac{34{,}8 - 9{,}5}{12}$, d. i.

$$Q = +\ 3{,}69 \text{ Tonnen.}$$

Endlich muss für die negativen Transversalkräfte im II. Felde das III. Feld so belastet sein, dass M_2 zu einem Maximum wird; für diese Belastung wird

$$Q = -\ 3{,}69 \text{ Tonnen.}$$

Fügt man diese Transversalkräfte den in der vorigen Tabelle enthaltenen hinzu, so erhält man die folgenden Resultate:

$\frac{x}{l}$ / $\frac{x}{l_1}$	*Bei Einzellasten*		*Bei gleichm. verth. Last*		*Aequivalente Last pro Meter, p für*	
	max (+ *Q*)	*max* (− *Q*)	*max* (+ *Q*)	*max* (− *Q*)	*max* (+ *Q*)	*max* (− *Q*)
I. Feld	+	—	+	—	—	—
0	*35,5*	*3,5*	*4,55*	*0,77*	*7,80*	*4,54*
0,2	*24,2*	*7,8*	*2,80*	*1,02*	*8,65*	*7,64*
0,4	*15,1*	*15,5*	*1,53*	*1,75*	*9,86*	*8,87*
0,6	*8,5*	*24,0*	*0,72*	*2,93*	*11,87*	*8,18*
0,8	*3,4*	*32,9*	*0,29*	*4,51*	*11,81*	*7,29*
1	*1,0*	*43,1*	*0,17*	*6,39*	*6,02*	*6,74*
II. Feld	+	—	+	—	+	—
0	*45,4*	*3,7*	*6,65*	*0,65*	*6,83*	*5,68*
0,2	*33,0*	*6,5*	*4,43*	*0,83*	*7,45*	*7,80*
0,4	*22,0*	*13,5*	*2,68*	*1,48*	*8,21*	*9,13*
0,5	*17,5*	*17,5*	*2,01*	*2,01*	*8,71*	*8,71*
	Tonnen		*. p Tonnen*		*Tonnen*	

In den beiden letzten Tabellen sind zum Vergleiche noch die Werthe für eine gleichmässig vertheilte Last nach den Tabellen auf Seite 95 und 94, sowie diejenige gleichmässig vertheilte Last, welche gleichen Werthen von Q und M entspricht, aufgenommen.

4. **Stützendrücke.** Der Druck auf der Stütze 0 ist identisch mit der hier wirksamen Transversalkraft, also $= 35{,}5$ *Tonnen*. Der Druck auf die Stütze 1 wird zum Maximum bei Belastung des I. und II. Feldes. Für eine einzige Einzellast ist der Stützendruck leicht berechnet; liegt diese Last im I. Felde, so ist $D_1 = G - Q_1' + \frac{M_1 - M_2}{l} = G - Q_1' + \frac{14}{11}\frac{M_1}{l}$; liegt sie im zweiten Felde, so ist $D_1 = Q_2' + \frac{M_1}{l_1}$, wobei Q_1', Q_2', M aus den obigen Tabellen zu entnehmen sind. Hiernach ist auf Tafel II. D_1 graphisch dargestellt. Für das angenommene System von Einzellasten ergiebt sich nun hiernach leicht als Maximaldruck $D_1 = 64{,}0$ *Tonnen*.

Für eine gleichmässig vertheilte Last würde $D_0 = 4{,}56\,p$, $D_1 = 13{,}04\,p$, daher p bezüglich $\frac{35{,}5}{4{,}56} = 7{,}80$ und $\frac{64{,}0}{13{,}04} = 4{,}91$ *Ton. pr. Met.*

§. 81. **Träger mit unendlich vielen Feldern.** Die Behandlung eines Trägers mit unendlich vielen Feldern unter Wirkung eines Systemes von Einzellasten lässt sich unmittelbar nach dem in §. 79 und 80 Gesagten durchführen. Die Resultate haben wir für Spannweiten von 2 bis 8 Meter als Grundlage zur Berechnung von sogenannten Schwellenträgern auf Tafel II. dargestellt. Hierbei ist dieselbe Lastvertheilung wie im vorigen §. vorausgesetzt. Im Folgenden stellen wir nur die absoluten Maxima der Transversalkräfte, Momente und Stützendrücke tabellarisch zusammen:

Transversalkräfte.

Spannweite	*Erstes Feld*				*Mittleres Feld*	
	Max (+ Q)	*p*	*Max* (− Q)	*p*	*Max* (+ Q)	*p*
1	*13,3*	*29,8*	*14,1*	*22,9*	*14,0*	*25,2*
2	*16,2*	*18,0*	*19,3*	*15,6*	*18,2*	*15,4*
3	*19,5*	*14,5*	*24,2*	*13,0*	*23,5*	*13,3*
4	*23,2*	*13,0*	*29,1*	*11,8*	*28,7*	*12,1*
5	*25,9*	*11,6*	*32,1*	*10,3*	*32,0*	*10,9*
6	*27,8*	*10,4*	*33,9*	*9,1*	*34,1*	*9,6*
8	*31,2*	*8,8*	*37,6*	*7,5*	*38,0*	*8,0*
Meter	*Tonnen*	*T. pr. Met.*	*Tonnen*	*T. pr Met.*	*Tonnen*	*T. pr. Met.*

Momente.

Spannweite	Erstes Feld				Mittleres Feld			
	Max (+ M)	p	Max (− M)	p	Max (+ M)	p	Max (− M)	p
1	1,96	16,3	2,80	28,0	1,72	15,1	2,45	29,4
2	4,81	10,0	5,59	14,0	4,52	10,0	4,93	13,6
3	9,01	8,7	10,04	11,2	8,42	8,2	8,28	11,0
4	11.73	6,1	17,46	10,9	11,27	6,2	14,78	11,1
5	20,35	6,8	25,18	10,1	15,12	5,3	21,16	10,1
6	29,48	6,8	32,74	9,1	25,86	6,3	28,13	9,7
8	51,49	6,7	48,44	7,5	43,81	6,0	41,65	7,8
Meter	Tonnen - Meter	Ton. pr. Meter	Tonnen - Meter	Ton. pro Meter	Tonnen - Meter	Ton. pro Meter	Tonnen - Meter	Ton. pro Meter

Stützendrücke.

Spannweite	Mittlere Stütze		Spannweite	Mittlere Stütze	
	Max D	p		Max D	p
1,0	14,0	11,9	3,0	31,1	8,7
1,5	17,1	9,7	4,0	34,2	7,2
1,8	22,0	10,3	5,0	36,2	7,6
2,0	24,2	10,3	6,0	39,2	5,5
2,5	28,1	9,8	8,0	47,8	5,1
Meter	Tonnen	T. pr. Met.	Meter	Tonnen	T. pr. Met.

Bis zu 8 Meter Spannweite ergiebt sich der Stützendruck auf eine mittlere Stütze am grössten, wenn das mittlere Locomotivrad an der betreffenden Stütze liegt.

In diesen Tabellen ist ausserdem die äquivalente gleichmässig vertheilte Last p angegeben. Für eine solche wird für das Endfeld $Max\,(+\,Q) = 0{,}447\,p\,l$, $Max\,(-\,Q) = 0{,}620\,p\,l$, $Max\,(+\,M) = 0{,}1198\,p\,l^2$, $Max\,(-\,M) = 0{,}1000\,p\,l^2$, für ein Mittelfeld $Max\,(+\,Q) = Max\,(-\,Q) = 0{,}592\,p\,l$, $Max\,(+\,M) = 0{,}1138\,p\,l^2$, $Max\,(-\,M) = 0{,}0833\,p\,l^2$ und $Max\,D = 1{,}183\,p\,l$.

§. 82. **Entsprechende gleichmässig vertheilte Last.** Bestimmt man für verschiedene Spannweiten diejenige gleichmässig vertheilte Last, welche dieselben Werthe von Q, M und D erzeugt, wie das System von Einzellasten, sowie dies in §. 80 beispielsweise geschehen ist, so erkennt man die folgenden Gesetze:

1. Je grösser die Spannweite ist, desto kleiner wird die gleichmässig vertheilte Last.

2. Für die Transversalkräfte nimmt die gleichmässig vertheilte Last von den Stützen aus nach der Mitte der Felder hin zu.

3. Für die negativen Maximalmomente nimmt die gleichmässig vertheilte Last von den Stützen aus nach der Mitte der Felder hin ab; in der Nähe der Stützen tritt eine starke Veränderung ein.

4. Für die positiven Maximalmomente ist die gleichmässig vertheilte Last nahezu constant und kleiner, als für die negativen.

5. Die gleichmässig vertheilte Last ist für die Transversalkraft grösser, als für die Momonte. Am kleinsten wird dieselbe für den Druck auf die mittleren Stützen.

6. Die Veränderung der gleichmässig vertheilten Last wird um so kleiner, je grösser die Spannweite ist.

7. Will man eine constante gleichmässig vertheilte Last annehmen, so ist dies nur für grössere Spannweiten (von etwa 30^m an) zulässig und man kann alsdann nahezu die gleichmässig vertheilte Last annehmen, welche für einen einfachen Träger anzunehmen ist, dessen Spannweite gleich dem arithmetischen Mittel der Spannweiten des continuirlichen Trägers ist. Es können also die in §. 23 aufgestellten Regeln auch für continuirliche Träger in Anwendung kommen.

XIII. Kapitel.

Träger mit ungleich hohen Stützen.

§. 83. **Normalmomente, welche durch die ungleiche Höhenlage der Stützen entstehen.** Wir setzen jetzt voraus, dass die Stützen nicht mehr in einer geraden Linie liegen, sondern eine beliebige Höhenlage haben. Die Entfernungen der Stützen von einer unter denselben liegenden Horizontalen seien $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n$. Eine Belastung setzen wir zunächst nicht voraus, um nur den Einfluss der verschiedenen Höhenlagen der Stützen zu erhalten. Alsdann ist nach den Gleichungen 10 (Seite 54):

$$\tau_m = + \frac{l_m}{6EW}(M_{m-1} + 2M_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m},$$

$$\tau_m = - \frac{l_m}{6EW}(2M_{m-1} + M_m) - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe für τ_m giebt

$$172. \quad M_{m+1} l_m + 2M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = -6EW\left(\frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}\right).$$

Nach dieser allgemeinen Form lässt sich für jede Combination von zwei auf einander folgenden Feldern eine Gleichung aufstellen, wodurch man $n-1$ Gleichungen für die Normalmomente erhält. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind dieselben, wie bei den Normalgleichungen 21 (Seite 57).

Die wirklichen Normalmomente, welche bei einer beliebigen Belastung entstehen, sind nun die Summen derjenigen Normalmomente, welche dieser Belastung bei horizontaler Lage der Stützpunkte und welche einer Nichtbelastung des Trägers bei ungleicher Höhenlage der Stützpunkte entsprechen. Dass dem so sei, geht ohne Weiteres aus den Normalgleichungen hervor, welche man durch Anwendung der Gleichungen 10 (Seite 54), welche auf Belastung und ungleiche Höhenlage gleichzeitig Rücksicht nehmen, erhält.

§. 84. **Gefährlichste Belastungsweise.** Die Transversalkraft Q und das Moment M an einem bestimmten Querschnitte setzen sich nach dem eben Gesagten aus zwei Theilen zusammen; der eine entspricht der Belastung bei horizontaler Lage der Stützen, der andere der Nichtbelastung bei verschiedener Höhenlage der Stützen. Beide Theile sind vollständig unabhängig von einander, falls die Stützen eine unveränderliche Höhenlage haben. Daher wird Q und M bei derselben Belastungsweise, für welche es bei horizontaler Lage der Stützen zum Maximum wurde, auch bei ungleicher Höhenlage der Stützen zum Maximum werden oder in anderen Worten: Die Höhenlage der Stützen ist auf die gefährlichste Belastungsweise ohne Einfluss.

Es kommen allerdings Fälle vor, in denen die Höhenlage der Stützen nicht unveränderlich gegeben ist, sondern von der Belastung selbst abhängig ist, auf die wir indess jetzt nicht eingehen wollen.

§. 85. **Einfluss der Verrückung einer einzigen Stütze.** Wir wollen jetzt voraussetzen, dass alle Stützen in einer Geraden liegen, mit Ausnahme der m^{ten} Stütze. Ohne auf die Normalgleichungen einzugehen, sieht man ein, dass durch ein Heben einer Mittelstütze an dieser eine nach oben convexe Krümmung, durch das Senken derselben eine nach oben concave Krümmung erzeugt wird oder: durch das Heben einer Stütze wird an dieser ein positives Moment, durch das Senken derselben ein negatives Moment erzeugt. Das durch die Belastung an einer Stütze erzeugte Moment wird also durch das Heben und Senken der Stütze bezüglich vergrössert und vermindert.

Die Momente an den übrigen Stützen ändern sich abwechselnd im positiven und negativen Sinne, jedoch nimmt der Einfluss von der fraglichen Stütze aus nach beiden Seiten hin ab. Hieraus ergiebt sich zugleich, in welchem Sinne sich die Momente an den übrigen Querschnitten ändern.

Wird eine Stütze gehoben, so entstehen im links neben dieser Stütze liegenden Felde negative, im rechts neben derselben liegenden Felde positive Transversalkräfte: Also werden die auf beiden Seiten dieser Stütze wirkenden absoluten Maxima der Transversalkräfte durch eine Hebung der Stütze vergrössert, durch eine Senkung vermindert. Hiernach wird auch der Stützendruck an einer Stütze durch eine Hebung derselben vergrössert, durch eine Senkung vermindert. Der Einfluss an den übrigen Stützen ist abwechselnd positiv und negativ und nimmt von der fraglichen Stütze aus nach beiden Seiten hin ab.

§. 86. Zweckmässigste Höhenlage der Stützen. Da man durch eine Veränderung der Höhenlage der Stützen wesentliche Veränderungen in der Beanspruchung des Trägers erzielen kann, so liegt es nahe, durch die Wahl einer bestimmten Höhenlage der Stützen Vortheile zu gewinnen zu suchen.

Zunächst würde natürlich die Materialmenge in Frage kommen. Wir betrachten in dieser Richtung die folgenden zwei Fälle:

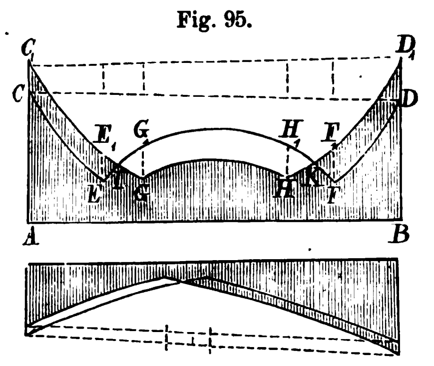
1. Der Querschnitt wird constant durchgeführt. Handelt es sich um volle Träger, insbesondere Blechträger, so ist das absolute Maximum der Momente massgebend. Bei horizontaler Lage der Stützen sind die Momente an den Mittelstützen die absoluten Maxima. Durch eine Senkung der Mittelstützen lassen sich diese Momente vermindern; hierbei wachsen aber die negativen Maximalmomente. Es ist nun offenbar zweckmässig, die Senkung so weit zu treiben, dass die positiven Maxima gleich den negativen Maximen werden, da bei noch weiterer Senkung die negativen Maxima als die absoluten Maxima auftreten und diese bei weiterer Senkung wachsen würden. Auf Grund dieser Thatsache wurde eine Senkung der Mittelstützen zuerst von Baurath Dr. Scheffler in Vorschlag gebracht.

Bei bereits bestehenden Brücken würde sich durch eine entsprechende Senkung der Mittelstützen eine Verminderung der Beanspruchung erzielen lassen.

2. Der Querschnitt wird variabel durchgeführt. In diesem Falle muss die Materialmenge bestimmt und die Höhenlage der Stützen derart ermittelt werden, dass die Materialmenge ein Minimum wird. Die Materialmenge aber hängt von den mittleren Momenten und den mittleren Transversalkräften ab, welche nach §. 53 zu bestimmen sind. Man kann hierbei indess auch die entsprechenden Flächen für eine horizontale Lage der Stützen verwenden. $CEFD$ (Fig. 95) sei nämlich die Momentencurve für eine horizontale Lage der Stützen, C_1GHD_1 dieselbe für eine ungleiche Höhenlage der Stützen. Die Momentenfläche für die ungleiche Höhenlage wird um die Fläche $CEIC_1$ und $DFKD_1$ grösser und um

die Fläche GI_1KHG kleiner. Die Flächen CEE_1C_1, DFF_1D_1 und GHH_1G_1 sind als Trapeze zu berechnen, deren Höhen gleich der Horizontalprojection dieser Flächen und deren parallele Seiten bezüglich CC_1 und EE_1, DD_1 und FF_1, GG_1 und HH_1 sind. Die übrigen dreieckähnlichen Flächen sind besonders zu berechnen, jedoch gleichen sich dieselben nahezu aus, so dass sie meist vernachlässigt werden können. In gleicher Weise würden die Flächen für die Transversalkräfte zu bestimmen sein.

Fig. 95.



Während man bei horizontaler Lage der Stützen die Transversalkraft- und Momenten-Flächen durch eine Summe von der Form $Ag + Bp$ darstellen konnte, ist dies für eine ungleiche Höhenlage nicht mehr streng möglich, weil die Punkte G und H bei verschiedenen Verhältnissen des Eigengewichtes zur zufälligen Last eine verschiedene Lage annehmen. Annähernd lässt sich indess das Gesetz $Ag + Bp$ auch hier anwenden.

Handelt es sich um einen ganz bestimmten Fall, so wird man am besten die Transversalkraft- und Momenten-Curven für eine horizontale Lage der Stützen darstellen und die Flächen bestimmen. Es ist alsdann sehr leicht, auch diese Fläche für verschiedene Höhenlagen der Stützen zu bestimmen und hierdurch die günstigste Höhenlage zu ermitteln.

Eine sehr wesentliche Veränderung tritt in dem Materialbedarfe durch eine Veränderung der Höhenlage nicht ein, weil sich hierbei die Momente und Transversalkräfte zum Theil vergrössern, zum Theil vermindern.

§. 87. **Träger mit zwei Feldern.** Liegt die Mittelstütze um s über der durch die Endstützen gehenden Geraden und ist eine Belastung nicht vorhanden, so ist die einzige Normalgleichung $4M_1 l^2 = 12EWs$, also

$$173. \quad M_1 = 3\frac{EWs}{l^2}.$$

Es ist nun $M_1 = -D_0 l$ und $2D_0 + D_1 = 0$, also

$$174. \quad D_0 = -3\frac{EWs}{l^3}, \quad D_1 = -2D_0 = +6\frac{EWs}{l^3}.$$

Endlich ist im ersten Felde $D = D_0$ und $M = -D_0 x$. Diese Werthe sind nun den der Belastung bei horizontaler Lage der Stützen entsprechenden Werthen nach §. 54 bis 57 hinzuzufügen.

Das absolute positive Maximum von M tritt an der Mittelstütze bei totaler Belastung beider Felder ein. Dasselbe ist bei horizontaler Lage der Stützen $= \frac{1}{8}(g+p)\,l^2$, also bei gehobener Mittelstütze

$$175.\quad Max\,(+M) = \frac{1}{8}(g+p)\,l^2 + \frac{3EWs}{l^2}.$$

Das absolute negative Maximum tritt in einem Felde bei totaler Belastung dieses einen Feldes ein. Da $M = -D_0 x + \frac{1}{2}(g+p)\,x^2$ ist, so wird M zum Maximum für $x = \frac{D_0}{g+p}$ und zwar ist $Max\,(-M) = -\frac{D_0^2}{2(g+p)}$. Nun aber ergiebt sich leicht $D_0 = \frac{1}{16}(g+p)\,l_2 - \frac{3EWs}{l^3}$, mithin wird

$$176.\quad Max\,(-M) = -\frac{1}{2(g+p)}\left[\frac{6g+7p}{16}\,l - \frac{3EWs}{l^3}\right]^2.$$

Setzt man die absoluten Werthe beider Momente gleich und ordnet nach Potenzen von s, so erhält man als Gleichung für die zweckmässigste Hebung bei constantem Querschnitte

$$\frac{9E^2W^2s^2}{l^6} - \frac{3EW(22g+23p)\,s}{8l^2} - \frac{(28g^2+44gp+15p^2)\,l^2}{256} = 0.$$

oder

$$177.\quad s = \frac{(22g+23p-4\sqrt{32g^2+66gr+34p^2})\,l^4}{48EW}.$$

Für die beiden Grenzen $g = 0$ und $p = 0$ wird hiernach:

$$g = 0:\ s = -\frac{4\sqrt{34}-23}{48}\,\frac{ql^4}{EW} = -0{,}00675\,\frac{ql^4}{EW},$$
$$Max\,M = 0{,}1048\,ql^2,$$
$$p = 0:\ s = -\frac{8\sqrt{2}-11}{24}\,\frac{ql^4}{EW} = -0{,}01307\,\frac{ql^4}{EW},$$
$$Max\,M = 0{,}0858\,ql^2.$$

Die Verminderung des positiven Maximalmomentes beträgt hiernach *16,2 bis 31,3 Procent*, die Vergrösserung des negativen Maximalmomentes *9,5 bis 22,1 Procent.* Die Transversalkräfte verändern sich hierbei um *0,0203 ql bis 0,0392 ql*, wobei sich im I. Felde die positiven vergrössern, die negativen vermindern; die Aenderung der positiven Maxima von Q beträgt *4,6 bis 10,5 Procent*, die Aenderung der negativen Maxima *3,3 bis 6,3 Procent.*

Die für verschiedene Hebungen und Senkungen der Mittelstütze nach dem vorigen §. berechneten mittleren Transversalkräfte und Momente sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	s	Mittlere Transversalkraft $\mathfrak{C}$		Mittleres Moment $\mathfrak{M}$	
		$p=0$	$g=0$	$p=0$	$g=0$
Hebung	+ 0,050	0,2806	0,3455	0,0499	0,0745
	+ 0,025	0,2725	0,3365	0,0488	0,0709
	0	0,2656	0,3287	0,0495	0,0708
Senkung	− 0,025	0,2600	0,3236	0,0520	0,0744
	− 0,050	0,2556	0,3205	0,0566	0,0829
	$\frac{gl^4}{3EW}$	$.gl$	$.pl$	$.gl^2$	$.pl^2$

Hiernach erhält man nahezu allgemein, wenn man zur Abkürzung $\frac{EWs}{gl^4} = \varkappa$ setzt,

$$178.\quad \begin{cases} \mathfrak{C} = [(0,2656g + 0,3287p) + 0,75(g+p)\varkappa + (9,0g + 15,5p)\varkappa^2]\, l, \\ \mathfrak{M} = [(0,0495g + 0,0708p) - (0,201g + 0,252p)\varkappa \\ \qquad\qquad + (13,5g + 28,4p)\varkappa^2]\, l^2. \end{cases}$$

Würde es auf die Momente allein ankommen, so würde die vortheilhafteste Höhenlage diejenige sein, für welche $\frac{d\mathfrak{M}}{ds} = 0$ wird, d. i. eine Hebung von der Grösse:

$$s = \frac{0,201g + 0,252p}{27,0g + 56,8p}\,\frac{gl^4}{EW}.$$

Für $g = 0$ und $p = 0$ wird $s = 0,0044\frac{gl^4}{EW}$ und $s = 0,0075\frac{gl^4}{EW}$; das mittlere Moment würde hierdurch um bezüglich *0,6* und *1,4 Procent* vermindert, während die positiven Maximalmomente bezüglich um *10,6* und *11,7 Procent* vergrössert werden.

§. 88. Träger mit drei Feldern. Liegen beide Mittelstützen um s über der Geraden, welche die Endstützen verbindet, so ist zunächst unter Voraussetzung keiner Belastung die Normalgleichung $2M_1(l_1 + l)l_1 + M_1 l l_1 = 6EWs$, mithin

$$179.\quad M_1 = \frac{6EWs}{l_1(2l_1 + 3l)} = \frac{6EWs}{(2 + 3n)l_1^2},$$

wenn wir $l = n l_1$ setzen. Es ist nun $M_1 = -D_0 l_1$ und $2D_0 + 2D_1 = 0$ oder

$$180.\quad D_0 = -D_1 = -\frac{6EWs}{l_1^2(2l_1 + 3l)} = -\frac{6EWs}{(2 + 3n)l_1^3}.$$

Endlich ist im I. Felde $Q = D_0$, $M = - D_0 x$ und im II. Felde $Q = D_0 + D_1 = 0$, M constant $= M_1$.

Das absolute positive Maximum von M tritt an einer Mittelstütze ein, wenn die beiden Felder neben dieser Stütze belastet sind. Setzt man in Formel 84 (S. 85) $\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4}(g+p)\,l_1^2$, $\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = \frac{1}{4}(g+p)\,l^2$, $\mathfrak{N}_0' = \frac{1}{4}\,g l_1^2$, so ergiebt sich, wenn man $g = mq$, $p = (1-m)\,q$ setzt, unter Berücksichtigung der verschiedenen Höhenlage der Stützen

$$181.\quad M_1 = \frac{2(1+n)+(2+n)\,n^3 - nm}{(2+n)(2+3n)}\,q l_1^2 + \frac{6EWs}{(2+3n)\,l_1^2}.$$

Das absolute negative Maximum von M tritt im I. Felde bei Belastung des I. und III. Feldes. Setzen wir daher in Formel 84 (S. 85) $\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4}(g+p)l_1^2$, $\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = \frac{1}{4}gl^2$, $\mathfrak{N}_3' = \frac{1}{4}(g+p)\,l_1^2$, so ergiebt sich

$$M_1 = \frac{1+n^3 m}{4(2+3n)}\,q l_1^2 + \frac{6EWs}{(2+3n)\,l_1^2},$$

$$D_0 = \frac{1}{2}\,g l_1 - \frac{M_1}{l_1} = \frac{3+6n-n^3 m}{4(2+3n)}\,q l_1 - \frac{6EWs}{(2+3n)\,l_1^2}.$$

Es ist nun $M = - D_0\,x + \frac{1}{2}\,q x^2$, wornach M zum Maximum für $x = \frac{D_0}{q}$ wird; bezeichnen wir dasselbe mit M_1', so wird $M_1' = -\frac{D_0^2}{2q}$, d. i.

$$182.\quad M_1' = -\frac{q l_1^2}{23(2+3n)^2}\left[(3+6n-n^3 m) - \frac{24EWs}{q l_1^4}\right]^2.$$

Endlich wird im II. Felde M zum absoluten negativen Maximum bei blosser Belastung des II. Feldes. Setzen wir in Formel 84 (Seite 85) $\mathfrak{N}_1'' = \frac{1}{4}\,g l_1^2$, $\mathfrak{N}_2' = \mathfrak{N}_2'' = \frac{1}{4}(g+p)\,l^2$, $\mathfrak{N}_3' = \frac{1}{4}\,g l_1^2$, so ergiebt sich

$$M_1 = M_2 = \frac{2m+2n^2+mn+2n^3-mn^4}{4(2+n)(2+3n)}\,q l_1^2 + \frac{6EWs}{(2+3n)\,l_1^2}.$$

Es ist nun $M = M_1 - \frac{1}{2}\,qx\,(l-x)$. Das Maximum von M tritt der Symmetrie wegen in der Mitte ein; bezeichnen wir dasselbe mit M_2', so wird $M_2' = M_1 - \frac{1}{8}\,q l^2$, d. i.

$$183.\quad M_2' = \frac{4m+2mn-4n^3-3n^4-2mn^4}{8(2+n)(2+3n)}\,q l_1^2 + \frac{6EWs}{(2+3n)\,l_1^2}.$$

Nimmt man zunächst $s = 0$, so findet man durch Berechnung von M_1, M_1' und M_2' für einige Werthe von m und n, dass M_1 stets grösser ist, als M_1' und M_2'. Bei constantem Querschnitte würde sonach dasjenige Verhältniss der Spannweiten das zweckmässigste sein, für welches M_1 ein Minimum wird. Differenziirt man M_1 nach n und setzt den Differenzialquotienten $= 0$, so ergiebt sich

$$184. \quad 8 + 12n - 18n^2 - 32n^3 - 14n^4 - 26n^5 - 12n^6 + 4m - 3mn^2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, dass für jeden Werth von m das Verhältniss n zwischen $0{,}913$ und $0{,}858$ liegt. Durchschnittlich ist dasselbe $= 0{,}873$, d. i. nahezu $\frac{7}{8}$, so dass hier die Spannweite des mittleren Feldes kleiner sein soll, als die der äusseren. Die sich aus 184 ergebenden Werthe von n stimmen sehr nahe mit den nach der folgenden Näherungsformel berechneten Werthen überein:

$$185. \quad n = 0{,}858\,\frac{g}{q} + 0{,}913\,\frac{p}{q}.$$

2. Anders gestaltet sich die Sache, wenn man s nicht $= 0$ annimmt. Es lässt sich hier zeigen (ganz entsprechend den in §. 34, Seite 48, gemachten Schlüssen), dass das grösste der drei Momente M_1, M_1' und M_2' möglichst klein wird, wenn $M_1 = -M_1' = -M_2'$ gesetzt wird. Setzt man zunächst $M_1 = -M_2'$, so findet man

$$186. \quad s = -\frac{16 + 16n + 12n^3 + 5n^4 + 4m - 6mn - 2mn^4}{96\,(2+n)}\,\frac{ql_1^4}{EW}.$$

Hiernach ist s negativ, die Mittelstützen müssen also gegen die äusseren gesenkt werden. Ferner wird nun

$$187. \quad \begin{cases} M_1 = +\dfrac{18 + 18n + 20n^3 + 11n^4 - 4m - 10mn + 2mn^4}{96\,(2+n)\,(2+3n)}\,ql_1^2, \\[2ex] M_1' = -\dfrac{(40 + 88n + 48n^2 + 12n^3 + 5n^4 + 4m - 6mn - 8mn^3 - 10mn^4)^2}{512\,(2+n)^2\,(2+3n)^2}\,ql_1^2. \end{cases}$$

Setzt man jetzt $M_1 = -M_1'$, so ergiebt sich für n eine Gleichung achten Grades, die durch Näherung aufzulösen sein würde. Am besten aber erscheint es wohl, M_1 und M_1' für einige Werthe von n zu berechnen und sodann durch Interpolation denjenigen Werth zu bestimmen, für welchen $M_1 - (-M_1)' = 0$ wird. Für alle Werthe von m liegt n zwischen den engen Grenzen $1{,}131$ und $1{,}174$; im Mittel ist $n = 1{,}156$, d. i. nahezu $\frac{15}{13}$. Ziemlich genau wird allgemein

$$188. \quad n = 1{,}174\,\frac{g}{q} + 1{,}131\,\frac{p}{q}.$$

Hier ergiebt sich also die Spannweite des mittleren Feldes grösser, als die des äusseren.

Die entsprechende Senkung der Mittelstützen ergiebt sich, wenn λ die mittlere Spannweite $\frac{1}{3}(2l_1 + l)$ bedeutet, sehr nahe zu

$$189. \quad s = \left(0{,}0266\,\frac{g}{p} + 0{,}0142\,\frac{p}{q}\right)\frac{q\lambda^4}{EW}.$$

Für Träger mit horizontalen Stützen ergiebt sich bei der Wahl des zweckmässigsten Verhältnisses der Spannweiten das grösste Moment $M_k = 0{,}1161\,q\lambda^2$ bis $0{,}1028\,q\lambda^2$, während sich bei gesenkten Mittelstützen unter den günstigsten Bedingungen das grösste Moment $= 0{,}1024\,q\lambda^2$ bis $0{,}0830\,q\lambda^2$, also um *11,8* bis *19,2 Procent* kleiner ergiebt.

3. Die für verschiedene Höhenlagen der Stützen nach §. 86 berechneten mittleren Transversalkräfte und Momente sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\frac{l}{l_1}$	*s*		*Mittlere Transversalkraft* $\mathfrak{Q}$		*Mittleres Moment* $\mathfrak{M}$	
			$p = 0$	$g = 0$	$p = 0$	$g = 0$
1,0	+ 0,050	+ 0,0417	0,2652	0,3530	0,0550	0,0877
	+ 0,025	+ 0,0208	0,2604	0,3470	0,0473	0,0771
	0	0	0,2567	0,3425	0,0452	0,0707
	— 0,025	— 0,0208	0,2540	0,3398	0,0499	0,0778
	— 0,050	— 0,0417	0,2559	0,3392	0,0595	0,0931
1,1	+ 0,050	+ 0,0414	0,2667	0,3425	0,0521	0,0842
	+ 0,025	+ 0,0207	0,2618	0,3367	0,0454	0,0735
	0	0	0,2580	0,3325	0,0434	0,0701
	— 0,025	— 0,0207	0,2550	0,3301	0,0487	0,0764
	— 0,050	— 0,0414	0,2530	0,3262	0,0574	0,0911
1,2	+ 0,050	+ 0,0410	0,2707	0,3600	0,0475	0,0867
	+ 0,025	+ 0,0205	0,2653	0,3517	0,0424	0,0735
	0	0	0,2607	0,3450	0,0424	0,0700
	— 0,025	— 0,0205	0,2570	0,3400	0,0468	0,0757
	— 0,050	— 0,0410	0,2545	0,3370	0,0555	0,0908
1,3	+ 0,050	+ 0,0406	0,2750	0,3580	0,0463	0,0871
	+ 0,025	+ 0,0203	0,2689	0,3526	0,0419	0,0722
	0	0	0,2642	0,3487	0,0424	0,0708
	— 0,025	— 0,0203	0,2604	0,3464	0,0462	0,0775
	— 0,050	— 0,0406	0,2585	0,3457	0,0546	0,0924
	$\frac{q l_1 (2l_1 + 3l)\lambda^4}{6EW}$	$\cdot\frac{q\lambda^4}{EW}$	$\cdot\,q\lambda$	$\cdot\,q\lambda$	$\cdot\,q\lambda^2$	$\cdot\,q\lambda^2$

Hiernach müssen die Mittelstützen ein wenig gehoben werden, damit das mittlere Moment zu einem Minimum werde. Das mittlere Moment lässt sich aber um höchstens *1 Procent* vermindern. Hierbei wächst aber die mittlere Transversalkraft ein wenig, wodurch der Vortheil noch vermindert wird, so dass man durch eine verschiedene Höhenlage der Stützen in der Materialmenge keinen besonderen Vortheil erzielen kann.

§. 89. Einfluss einer zufälligen Aenderung der Höhenlage. Die Anwendung continuirlicher Träger setzt voraus, dass die Höhenlage der Stützen, welche der Berechnung zu Grunde gelegt wurde, auch möglichst genau ausgeführt und erhalten wird. Nach dem Vorstehenden ist es leicht, die Aenderung der Momente, Transversalkräfte und Stützendrücke zu bestimmen, welche eintritt, wenn sich die Höhenlage der Stützen um ein gewisses Maass ändert.

Die Momente, welche durch eine Höhenänderung erzeugt werden, lassen sich ausdrücken in der allgemeinen Form $A \frac{E W s}{l^2}$. Bezeichnen wir das mittlere Moment mit $\mathfrak{M}$, so kann man bei Parallelträgern W ausdrücken durch die Form $B \mathfrak{M} l$, vorausgesetzt, dass man die Höhe des Trägers der Spannweite proportional macht. Setzt man $\mathfrak{M} = k q l^2$, so wird $W = B k q l^3$, folglich das durch die Höhenänderung erzeugte Moment $= A B k E q l s$. Drücken wir das an derselben Stelle durch das Eigengewicht und die zufällige Last bei horizontaler Lage der Stützen erzeugte Moment durch $k_1 q l^2$ aus, so wird das Verhältniss der Aenderung

$$= C \frac{s}{l},$$

wenn C einen annähernd constanten Coefficienten bezeichnet. Dasselbe lässt sich von den Transversalkräften und Stützendrücken nachweisen. Der relative Einfluss einer Höhenänderung ist also der Höhenänderung direct und nahezu der Spannweite umgekehrt proportional.

Näherungswerthe für C sind im Folgenden zusammengestellt:

Träger mit zwei Feldern.

Positives Maximalmoment	$C = 2{,}46$
Negatives Maximalmoment	„ 1,49
Transversalkraft am Endpfeiler	„ 0,75
Transversalkraft am Mittelpfeiler	„ 0,49
Stützendruck am Mittelpfeiler	„ 0,49

Träger mit drei Feldern.

		A.	B.
Positives Maximalmoment an der Stütze 1:	$C =$	1,75	1,08
Positives Maximalmoment an der Stütze 2:	„	1,07	1,08
Negatives Maximalmoment im I. Felde:	„	1,08	0,67
Negatives Maximalmoment im II. Felde:	„	0,54	1,68
Positive Max. Transversalkraft im I. Felde:	„	0,54	0,34
Negative Max. Transversalkraft im I. Felde:	„	0,36	0,23
Positive Max.-Transversalkraft im II. Felde:	„	0,58	0
Negative Max.-Transversalkraft im II. Felde:	„	0,58	0
Stützendruck auf die Mittelstütze 1:	„	0,47	0,11
Stützendruck auf die Mittelstütze 2:	„	0,40	0,11

Beim Träger mit drei Feldern bezieht sich A auf den Fall, dass nur eine Mittelstütze (die Stütze Nr. 1) um s, dagegen B auf den Fall, dass beide Mittelstützen um s von der die Endstützen verbindenden Geraden abweichen. Die Zahlen sind nur genau für das Verhältniss der Spannweiten von $5:6:5$.

Bei kleineren Spannweiten, unter etwa *40 Meter*, geben diese Regeln etwas zu kleine Werthe.

Bei den Spannweiten von *30, 50, 100, 150 Meter* und bei *1 Centimeter* Höhenänderung eines Mittelpfeilers ergiebt sich die Aenderung der positiven Maximalmomente bei zwei Feldern zu *12,0 4,9, 2,1, 1,8 Proc.*, bei drei Feldern zu *6,5, 3,5, 1,6, 1,2 Procent*, die Aenderung der negativen Maximalmomente bei zwei Feldern zu *7,2, 3,0, 1,7, 1,0 Procent*, bei drei Feldern im I. Felde zu *3,9, 1,2, 1,0, 0,8 Procent.* Die relative Aenderung der Transversalkräfte und Stützendrücke ist geringer; sie beträgt höchstens bezüglich *2,0, 1,2, 0,6, 0,4 Procent.*

§. 90. Einfluss einer Temperaturänderung. Ausser den mehr zufälligen Ereignissen, welche eine Höhenänderung der Stützen herbeiführen können, und welchen sich in ziemlich hohem Grade vorbeugen lässt, ist auch noch die Aenderung der Temperatur zu erwähnen, welche eine Aenderung der Höhe der Pfeiler bewirkt. Bezeichnen wir die Pfeilerhöhe mit h, den Ausdehnungscoefficienten für 1° Cels. mit α, die Temperaturänderung gegen eine mittlere Temperatur, bei welcher die Stützen in einer Geraden liegen, mit t, so ist die Höhenänderung der Stütze

$$s = \pm \alpha t h.$$

Nehmen wir $t = 30$ *Grad* und für Steinmaterial $\alpha = 0{,}000007$, für Eisen $\alpha = 0{,}0000112$ an, so wird:

$$\textit{Stein}: \; s = \pm\, 0{,}021\, h \; \textit{Centim.}$$
$$\textit{Eisen}: \; s = \pm\, 0{,}034\, h \; \textit{Centim.},$$

wobei h in Metern zu nehmen ist. Nehmen wir als grösste Höhe etwa *60 Meter* an, so würde für Stein $s = 1{,}3$, für Eisen $s = 2{,}0$ *Centim.* Bei dieser Höhenänderung würden sich bei Spannweiten von *30, 50, 100, 150 Meter* die positiven Maximalmomente bei zwei Feldern für Stein um *16,0, 6,4, 2,7, 2,1 Procent*, für Eisen um *24,0, 9,8, 4,2, 3,2 Procent* ändern. Es sind dies Aenderungen, welche zum Theil nicht unbedeutend zu nennen sind, so dass man auf eine Aenderung der Höhenlage durch Temperaturänderungen bei hohen Pfeilern und kleineren Spannweiten jedenfalls Rücksicht nehmen muss.

Durch diese Höhenänderung ändert sich auch der Druck auf den Pfeiler, hierdurch aber auch die elastische Zusammendrückung desselben. Mit Rücksicht auf diesen Umstand ergiebt sich die Höhenänderung der

Stütze etwas geringer, als unter blosser Berücksichtigung der Längenänderung des Pfeilers durch die Wärme. Es lässt sich jedoch durch Einführung von Zahlen nachweisen, dass der Unterschied nur gering ist, so dass es nicht nöthig erscheint, auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen.

II. Analytische Behandlung unter Annahme eines variabelen Querschnittes.

XIV. Kapitel.

Allgemeines.

§. 91. Schief eingespannter Träger bei beliebiger Belastung. Die ein- und zweimalige Integration der allgemeinen Differenzialgleichung der elastischen Linie $EW\frac{d^2y}{dx^2} = M$ giebt statt der Gleichungen 2, 3, und 4 (Seite 52 und 53), wenn wir die in §. 36 angewendeten Bezeichnungen beibehalten:

$$190. \quad E(\tau_2 - \tau_1) = \int_0^l \frac{M\,dx}{W};$$

$$191. \quad Ey = Ex\frac{dy}{dx} - \int \frac{Mx\,dx}{W};$$

$$192. \quad E(l\tau_2 - s) = \int_0^l \frac{Mx\,dx}{W}.$$

Die Ausdrücke 5 und 6 (Seite 53) für M behalten selbstverständlich auch hier ihre Gültigkeit. Die Einsetzung des Ausdruckes 6 in die Gleichung 190 und 192 giebt

$$E(\tau_2 - \tau_1) = \frac{M'}{l}\int\frac{(l-x)\,dx}{W} + \frac{M''}{l}\int\frac{x\,dx}{W} + \int\frac{X\,dx}{W},$$

$$E(l\tau_2 - s) = \frac{M'}{l}\int\frac{x(l-x)\,dx}{W} + \frac{M''}{l}\int\frac{x^2\,dx}{W} + \int\frac{Xx\,dx}{W},$$

wobei sämmtliche Integrale zwischen den Grenzen 0 und l zu nehmen sind.

Wir bezeichnen nun diejenige Grösse $\mathfrak{W}$, deren reciproker Werth das arithmetische Mittel der reciproken Werthe aller Trägheitsmomente W ist, so dass also

$$193. \quad \frac{l}{\mathfrak{W}} = \int\frac{dx}{W},$$

ist, wobei aber die Integration nicht auf ein einzelnes Feld, sondern auf sämmtliche Felder auszudehnen ist, mit dem Namen **mittleres Trägheitsmoment** und setzen zur Abkürzung für ein bestimmtes Feld

$$194. \quad \frac{\mathfrak{W}}{l}\int_0^l\frac{dx}{W} = A, \quad \frac{2\mathfrak{W}}{l^2}\int_0^l\frac{x\,dx}{W} = B, \quad \frac{3\mathfrak{W}}{l^3}\int_0^l\frac{x^2\,dx}{W} = C.$$

Die Zahlen A, B und C werden $= 1$, wenn der Querschnitt constant ist. Wir setzen ausserdem noch zur Abkürzung

$$195. \quad -\frac{6\mathfrak{W}}{l^2}\int_0^l \frac{X x\, dx}{W} = \mathfrak{N}'', \quad -\frac{6\mathfrak{W}}{l^2}\int_0^l \frac{X(l-x)\, d(l-x)}{W} = \mathfrak{N}'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt noch

$$195a. \quad -6\mathfrak{W}\, l\int_0^l \frac{X\, dx}{W} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}''.$$

Dies in die obigen Gleichungen eingesetzt, giebt

$$\begin{cases} 6E\mathfrak{W}\, l\,(\tau_2 - \tau_1) = 3\,(2A = B)\, M' l^2 + 3BM'' l^2 - (\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'')\, l^2, \\ 6E\mathfrak{W}\,(l\tau_2 - s) = (3B - 2C)\, M' l^2 + 2CM'' l^2 - \mathfrak{N}'' l^2. \end{cases}$$

Die Reduction auf τ_1 und τ_2 giebt

$$196. \quad \begin{cases} \tau_1 = -\dfrac{l}{6E\mathfrak{W}}\left[2\alpha M' + \gamma M'' - \mathfrak{N}'\right] + \dfrac{s}{l}, \\ \tau_2 = +\dfrac{l}{6E\mathfrak{W}}\left[\gamma M' + 2\beta M'' - \mathfrak{N}''\right] + \dfrac{s}{l}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$197. \quad \alpha = 3A - 3B + C, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3B - 2C$$

setzt. Hierbei wird ebenfalls $\alpha = \beta = \gamma = 1$, wenn der Querschnitt constant ist.

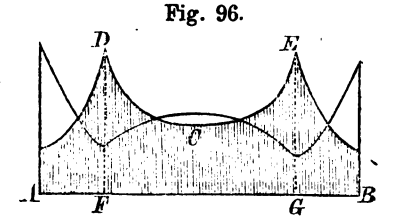
Ist der Träger an den Enden horizontal eingespannt, so wird, wenn wir, wie früher, die Momente an den Enden mit $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ bezeichnen, $0 = 2\alpha\mathfrak{M}' + \gamma\mathfrak{M}'' - \mathfrak{N}'$ und $0 = \gamma\mathfrak{M}' + 2\beta\mathfrak{M}'' - \mathfrak{N}''$, mithin

$$\mathfrak{M}' = \frac{2\beta\mathfrak{N}' - \gamma\mathfrak{N}''}{4\alpha\beta - \gamma^2}, \quad \mathfrak{M}'' = \frac{2\alpha\mathfrak{N}'' - \gamma\mathfrak{N}'}{4\alpha\beta - \gamma^2}.$$

Für einen constanten Querschnitt würde demnach $\mathfrak{M}'' = \frac{1}{3}(2\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}'')$, $\mathfrak{M}'' = \frac{1}{3}(2\mathfrak{N}'' - \mathfrak{N}')$.

§. 92. **Bestimmung der Hülfsgrössen.** Zur Bestimmung dieser Hülfsgrössen α, β und γ tragen wir den reciproken Werth $\frac{1}{W}$ des Trägheitsmomentes an der betreffenden Stelle als Ordinate auf; die so erhaltene Fläche $ADCEB$ (Fig. 96) nennen wir die Krümmungsfläche, weil die Krümmung $\frac{d^2y}{dy^2}$ von $\frac{1}{W}$ abhängt. Die Integrale $\int\frac{dx}{W}$, $\int\frac{x\,dx}{W}$ und $\int\frac{x^2\,dx}{W}$ bedeuten nun bezüglich den Flächeninhalt, das statische Moment und das Trägheits-

Fig. 96.



moment der Krümmungsfläche in Beziehung auf die Anfangsordinate Bezeichnen wir diese Grössen mit F, S und T, so wird

$$A = \frac{F\mathfrak{W}}{l}, \quad B = \frac{2\mathfrak{W}S}{l^2}, \quad C = \frac{3\mathfrak{W}T}{l^3}.$$

Bezeichnet man ferner das statische und Trägheitsmoment der Krümmungsfläche in Beziehung auf die Endordinate in B mit S_1 und T_1 und setzt entsprechend

$$B_1 = \frac{2\mathfrak{W}S_1}{l^2}, \quad C_1 = \frac{3\mathfrak{W}T_1}{l^3},$$

so ergeben sich leicht die Beziehungen

$$B_1 = 2A - B, \quad C_1 = 3A - 3B + C.$$

Wir haben sonach

$$198. \quad \alpha = C_1, \quad \beta = C, \quad \gamma = 3A - \alpha - \beta.$$

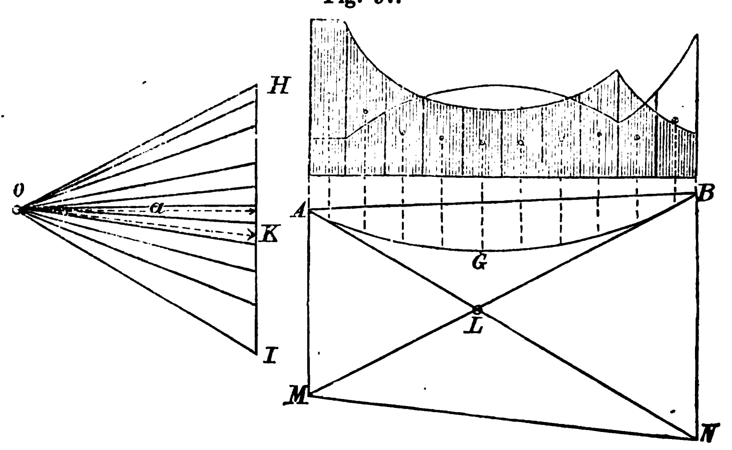
Zur Bestimmung der Hülfsgrössen α, β und γ ist also die Kenntniss der statischen Momente S und S_1 nicht nöthig; man braucht vielmehr nur den Flächeninhalt F und die Trägheitsmomente T und T_1 der Krümmungsfläche für die beiden Endordinaten. Die Bestimmung dieser Grössen kann in mehrfacher Weise erfolgen:

1. Durch Rechnung. Bei krummliniger Begrenzung wendet man zur Berechnung am besten die Simpson'sche Regel an. Aendert sich aber der Querschnitt, wie dies meist der Fall ist, staffelförmig, so besteht die Krümmungsfläche aus einzelnen Rechtecken, deren Flächen und Trägheitsmomente einzeln zu berechnen sind.

2. Durch Planimetrirung. Das geeignetste Mittel ist jedenfalls das Momentenplanimeter von Amsler, mit Hülfe dessen man durch blosses Umfahren der Fläche den Flächeninhalt, das statische und Trägheitsmoment erhält (siehe des Verfassers „Vorträge über Eisenbahnbau, Heft 1, Seite 214").

3. Durch Construction. Man denkt sich die Krümmungsfläche als Belastungsfläche, d. h. die Ordinaten als Lasten pro Längeneinheit,

Fig. 97.



und construirt hierzu nach §. 2 und 18 die Seilcurve AGB (Fig. 97). Zieht man zwischen den Endverticalen die Endtangenten AN und BM der Seilcurve, so ist, wenn man die Poldistanz des Kräftenpolygons mit a bezeichnet, $T = 2a$ *Fläche* $AGBM$, $T_1 = 2a$ *Fläche* $AGBN$ (Vergl. „Vorträge über Eisenbahnbau, Heft 1, Seite 211 bis 214"). Die Fläche F ist gleich der Linie HJ im Kräftepolygone. Es lässt sich aber auch Fl^2 deuten; macht man nämlich OK parallel MN, so ist $AM = IK\frac{l}{a}$, $BN = HK\frac{l}{a}$, also *Fläche* $ABNM = \frac{1}{2}(AM + BN)l = \frac{1}{2}(IK + HK)\frac{l^2}{a} = \frac{Fl^2}{2a}$, also $Fl^2 = 2a$ *Fläche* $ABNM$. Sonach wird nun

$$199.\quad \alpha = 3 . \frac{\textit{Fläche } AGBN}{\textit{Fläche } ABNM},\quad \beta = 3 . \frac{\textit{Fläche } AGBM}{\textit{Fläche } ABNM}.$$

Es lässt sich endlich auch noch der Coefficient γ deuten. Es ist nämlich

$$\gamma = 3A - \alpha - \beta = 3\,\frac{\textit{Fläche } ABNM - \textit{Fläche } AGBN - \textit{Fläche } AGBM}{\textit{Fläche } ABNM}$$

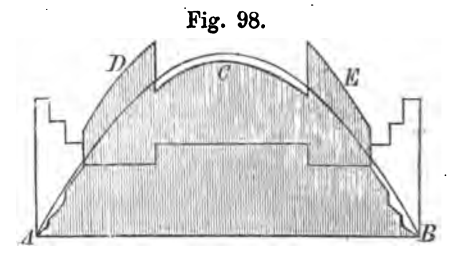
Setzt man *Fläche* $ABNM = \Delta ALM + \Delta BLN + 2\Delta ALB$, so findet man sehr leicht

$$200.\quad \gamma = 6\,\frac{\textit{Fläche } AGB}{\textit{Fläche } ABNM}.$$

Durch Construction eines zweiten Seilpolygones würde man α, β und γ auch als Verhältnisse zweier Linien darstellen können; jedoch ist der eben gezeigte Weg einfacher und genauer, wenn man zur Flächenbestimmung das Vorhandensein eines einfachen Flächenplanimeters voraussetzt.

§. **93. Bestimmung der Grössen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$.** In §. 91 bedeutet X das Moment an einem beliebigen Querschnitte unter der Annahme, dass der Träger mit den beiden Enden frei aufliegt oder für den sogen. einfachen Träger. Multiplicirt man X mit dem Verhältnisse $\frac{\mathfrak{W}}{W}$ des mittleren Trägheitsmomentes zum wirklichen Trägheitsmomente an dem fraglichen Querschnitte und trägt die Grösse $\frac{\mathfrak{W}}{W}X$ als Ordinate auf, so erhält man eine Fläche $ADCEB$ (Fig. 98), welche sich der Momentenfläche für den einfachen Träger oder der einfachen Momentenfläche um so mehr nähert, je weniger variabel der Querschnitt ist; wir nennen daher diese Fläche die **verzerrte einfache Momentenfläche**, oder, falls kein Missverständniss entsteht, kurz die **verzerrte Momentenfläche**.

Fig. 98.



Nach der in §. 91 den Grössen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ beigelegten Bedeutung sind $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ bezüglich das $\frac{6}{l^2}$fache der statischen Momente der verzerrten Momentenfläche in Beziehung auf die durch die Enden B und A gehenden Verticalen, so dass also $\mathfrak{N}'$ dem rechten Ende B, $\mathfrak{N}''$ dem linken Ende A entspricht.

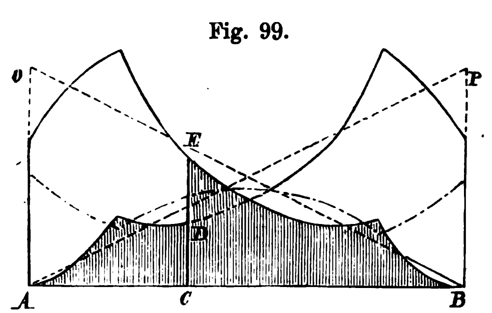
Die Bestimmung der statischen Momente der verzerrten Momentenfläche kann nun, entsprechend dem vorigen Paragraphe, 1. durch Rechnung, 2. mit Hülfe des Momentenplanimeters und 3. durch Construction erfolgen. In ersten Falle wird man bei continuirlicher Veränderung des Querschnittes am besten die Simpson'sche Regel anwenden. Wenn sich aber der Querschnitt staffelförmig ändert, so wird man die statischen Momente der einzelnen Theile bestimmen; da der Ausdruck für X durch die Belastungsweise bestimmt ist, so wird man die Integration innerhalb der einzelnen Strecken ausführen können. In Betreff der Construction ist zu bemerken, dass die statischen Momente dargestellt werden 1. durch das Product aus dem Flächeninhalte und dem Abstande des (durch den Durchschnitt der Endtangenten der Seilcurve bestimmten) Schwerpunktes von den Endverticalen, und 2. durch das Product aus dem Abschnitte der Endtangenten auf den Endverticalen und der Poldistanz.

Wir behandeln nun noch die folgenden speciellen Fälle:

1. Einzellast. Im Falle einer Einzellast wird das Moment X für den einfachen Träger durch zwei Geradé dargestellt. Handelt es sich nur um eine einzige Lage oder um wenige Lagen der Einzellasten, so verfährt man am besten nach dem eben Gesagten. Handelt es sich aber um viele Lagen der Einzellast, so wendet man besser eines der folgenden Verfahren an:

a) Man zieht durch A und B zwei Gerade AP und BO (Fig. 99) welche gegen AB unter einem Winkel geneigt sind, dessen Tangente eine angenommene einfache Zahl m ist. Die Ordinaten dieser Geraden werden mit $\frac{\mathfrak{W}}{W}$ multiplicirt und somit zwei Curven I und II construirt. Man theilt die hierdurch begrenzten Flächen in Streifen und bestimmt die statischen Momente derselben in Beziehung auf die beiden Endverticalen durch Rechnung, Planimetrirung oder Construction. Durch Summirung erhält man das statische Moment beliebiger Theile. Bezeichnet man nun für den Fall, dass die Einzellast in C liegt, die statischen Momente der schraffirten Flächen in Beziehung auf die durch A gehende Verticale mit S' und S'',

Fig. 99.



so sind die statischen Momente der beiden entsprechenden Theile der verzerrten Momentenfläche $S' \frac{y}{m x'}$ und $S'' \frac{y}{m x''}$, wenn x', x'' den Abstand der Einzellast von den Enden A und B, und y das Moment am Angriffspunkte der Last bezeichnet. Sonach ist

$$\mathfrak{N}'' = \frac{6y}{m l^3} \left(\frac{S'}{x'} + \frac{S''}{x''} \right).$$

Nun aber ist für die Einzellast G das Moment $y = G \frac{x' x''}{l}$, mithin wird

$$201. \quad \mathfrak{N}'' = \frac{6G}{m l^4} (S' x'' + S'' x').$$

In gleicher Weise ist $\mathfrak{N}'$ zu bestimmen. Die statischen Momente sind wiederum durch Rechnung, Planimetrirung oder Construction zu bestimmen. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, dass das statische Moment eines beliebigen Flächenstückes dargestellt wird durch das Product aus dem Abschnitte, welchen die beiden den Enden des fraglichen Flächentheiles entsprechenden Tangenten der Seilcurve auf der in Rede stehenden Momentenaxe abschneiden und aus der Poldistanz.

b) Es ist

$$S' = \mathfrak{W} \int_0^x \frac{m x \,.\, x \,.\, dx}{W} = m \mathfrak{W} \int_0^x \frac{x^2 \, dx}{W},$$

$$S'' = \mathfrak{W} \int_x^l \frac{m (l - x) \,.\, x \,.\, dx}{W} = m \mathfrak{W} \int_x^l \frac{(l x - x^2) \, dx}{W}.$$

Nun aber ist $\int_x^l \frac{x \, dx}{W}$ das statische Moment des zwischen x und l liegenden Theiles der Krümmungsfläche in Beziehung auf das linke Ende, $\int_0^x \frac{x^2 \, dx}{W}$ und $\int_x^l \frac{x^2 \, dx}{W}$ die Trägheitsmomente der zwischen 0 und x, x und l liegenden Theile der Krümmungsfläche in Beziehung auf das linke Ende. Sonach kann man S' und S'' durch Rechnung, Planimetrirung oder Construction auch bestimmen, ohne die Curven in Fig. 99 zu construiren. In Betreff der Construction ist zu bemerken, dass das Trägheitsmoment eines beliebigen Flächentheiles dargestellt wird durch das doppelte Product aus der Fläche, welche zwischen den dem Flächentheile entsprechenden Endtangenten der Seilcurve und der Momentenaxe enthalten ist, und der Poldistanz. Diese Methode dürfte der vorigen vorzuziehen sein, weil sie die Construction neuer Curven unnöthig macht.

2. Partielle gleichmässige Belastung. Handelt es sich nicht um eine bestimmte oder um wenige bestimmte partielle Belastungen, sondern um mehrere, so kommt man am schnellsten zum Ziele, wenn man von

der Einzellast ausgeht. Man bestimmt für verschiedene Lagen der Einzellast das $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ und stellt dasselbe durch Ordinaten dar, welche dem Angriffspunkte der Einzellast entsprechen und erhält somit zwei Curven. Man bestimmt nun die von diesen Curven und der Abscissenaxe eingeschlossenen Flächen F', F'', welche dem belasteten Theile entsprechen. Alsdann ist bei der Last p pro Längeneinheit $\mathfrak{R}' = \frac{p}{G} F$ und $\mathfrak{R}'' = \frac{p}{G} F''$, wobei G beliebig, also auch $= 1$ gewählt werden kann.

§. 94. **Der continuirliche Träger.** Die in §. 38 gebrauchten Bezeichnungen behalten wir auch hier bei. Unter der Voraussetzung, dass alle Stützen in einer Geraden liegen, geben die Gleichungen für den Winkel τ_m an der m^{ten} Stütze

$$\begin{cases} 6E\mathfrak{W}\tau_m = + l_m (\gamma_m M_{m-1} + 2\beta_m M_m - \mathfrak{R}''_m), \\ 6E\mathfrak{W}\tau_m = - l_{m+1} (2\alpha_{m+1} M_m + \gamma_{m+1} M_{m+1} - \mathfrak{R}'_{m+1}). \end{cases}$$

Die Subtraction beider Gleichungen giebt als Beziehung zwischen drei aufeinander folgenden Normalmomenten:

$$202. \quad \gamma_m l_m M_{m-1} + 2(\beta_m l_m + \alpha_{m+1} l_{m+1}) M_m + \gamma_{m+1} l_{m+1} M_{m+1} = l_m \mathfrak{R}''_m + l_{m+1} \mathfrak{R}'_{m+1}.$$

Hiernach lassen sich nun, wie in §. 38, die einzelnen Normalgleichungen aufstellen, deren Auflösung zur Kenntniss der Normalmomente führt.

Sind die Normalmomente bestimmt, so ergeben sich hieraus die übrigen Grössen genau in der in §. 39 gezeigten Weise. Ebenso können die in §. 41 und 42 aufgestellten Regeln ohne Weiteres zur Anwendung kommen.

XV. Kapitel.

Belastung eines einzelnen Feldes.

§. 95. **Die nicht belasteten Felder.** Ist eine Reihe von Feldern, vom ersten angefangen, nicht belastet, so sind die Normalgleichungen für die nicht belasteten Felder:

$$203. \quad \begin{cases} 2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2) M_1 + \gamma_2 l_2 M_2 = 0, \\ \gamma_2 l_2 M_1 + 2(\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) M_2 + \gamma_3 l_3 M_3 = 0, \\ \gamma_3 l_3 M_2 + 2(\beta_3 l_3 + \alpha_4 l_4) M_3 + \gamma_4 l_4 M_4 = 0. \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Hiernach ist zunächst $M_2 = -\left(2\frac{\alpha_2}{\gamma_2} + 2\frac{\beta_1 l_1}{\gamma_2 l_2}\right) M_1$, also $M_2 > -2\frac{\alpha_2}{\gamma_2} M_1$. Für Parallelträger geht speciellen Berechnungen zufolge $\frac{\alpha}{\gamma}$ nicht unter $0{,}9$ herab, also ist $M_2 > -1{,}8 M_1$ oder $M_1 < -0{,}56 M_2$.

Ferner ist $M_3 = -\left[2\frac{\alpha_3}{\gamma_3} + \frac{l_2}{l_3}\left(2\frac{\beta_2}{\gamma_3} + \frac{\gamma_2 M_1}{\gamma_3 M_2}\right)\right] M_2$. Nun aber ist $\frac{\gamma_2 M_1}{\gamma_3 M_2}$ negativ, aber höchstens $= 0{,}56 \,.\, 1{,}2 = 0{,}67$, da $\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$ höchstens $= 1{,}2$ ist; da ferner $\frac{\beta_2}{\gamma_3}$ stets $> 0{,}8$ ist, so wird $2\frac{\beta_2}{\gamma_3} + \frac{\gamma_2 M_1}{\gamma_3 M_2}$ stets $> 2 \,.\, 0{,}8 - 0{,}67$ d. i. $> 0{,}93$. Somit haben auch M_2 und M_3 entgegengesetztes Vorzeichen und es ist, da $\frac{\alpha_3}{\gamma_3}$ stets $> 0{,}8$ ist, $M_2 > - 1{,}6\, M_2$ oder sogar $M_3 > -\left(1{,}6 + 0{,}93\frac{l_2}{l_3}\right) M_2$. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse kommt man zu dem Resultate:

Die Normalmomente in den nicht belasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen vom Ende nach den belasteten Feldern hin zu und zwar ist

$$M_{m+1} > -\left(1{,}6 + 0{,}93\frac{l_m}{l_{m+1}}\right) M_m.$$

Da l_m selten $< \frac{8}{4} l_{m+1}$ sein wird, so wird gewöhnlich $M_{m+1} > - 2{,}3 M_m$ sein.

Wir setzen nun, wie in §. 44 $M_2 = -\mu_2 M_1$, $M_3 = -\mu_3 M_2$, $M_4 = -\mu_4 M_3, \ldots$ und ebenso $M_{n-2} = -\nu_{n-1} M_{n-1}$, $M_{n-1} = \nu_{n-2} M_{n-2}, \ldots$ Alsdann ergiebt sich aus den Normalgleichungen 202:

$$204. \quad \mu_2 = \frac{2(\beta_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}{\gamma_2 l_2}, \quad \mu_3 = \frac{2(\beta_2 l_2 + \alpha_3 l_3) - \frac{\gamma_2 l_2}{\mu_2}}{\gamma_3 l_3}, \ldots$$

In derselben Weise sind, indem man vom rechten Ende beginnt, die ν zu berechnen. Nach dem Obigen ist $\mu_m > 1{,}6 + 0{,}93\frac{l_m}{l_{m+1}}$, also in der Regel $\mu_m > 2{,}3$.

In Betreff der Aenderung der Transversalkräfte, Stützendrücke und Momente in den nicht belasteten Feldern gelten nun auch hier die in §. 45 gefundenen Gesetze, mit Ausnahme der Formeln 40 und 41, die durch Berücksichtigung der Coefficienten α, β und γ zu ergänzen sein würden.

Auch hier existiren in jedem Felde zwei Fixpunkte I und K, welche die Eigenschaft haben, dass das Moment am linken Fixpunkte I von der Belastung der rechts liegenden Felder und das Moment am rechten Fixpunkte K von der Belastung der links liegenden Felder unabhängig ist, so dass also z. B. das Moment in $I = 0$ ist, wenn nur die rechts liegenden Felder in irgend welcher Weise belastet sind. Die Abstände a und b dieser Fixpunkte vom bezüglich linken und rechten Ende des Feldes sind

$$205. \quad a = \frac{l}{1 + \mu}, \quad b = \frac{l}{1 + \nu},$$

wenn sich l, μ und ν auf das fragliche Feld beziehen. Da μ und $\nu > 2{,}3$ sind, so sind a und $b < 0{,}3\, l$.

§. 96. **Normalmomente für ein belastetes Feld.** Es sei jetzt nur ein Feld, und zwar das r^{te}, belastet. Die Normalgleichungen, welche sich auf das belastete Feld beziehen, sind nach 202:

$$\begin{cases} \gamma_{r-1} l_{r-1} M_{r-2} + 2(\beta_{r-1} l_{r-1} + \alpha_r l_r) M_{r-1} + \gamma_r l_r M_r = l_r \mathfrak{N}', \\ \gamma_r l_r M_{r-1} + 2(\beta_r l_r + \alpha_{r+1} l_{r+1}) M_r + \gamma_{r+1} l_{r+1} M_{r+1} = l_r \mathfrak{N}''. \end{cases}$$

Denkt man sich das r^{te} Feld nicht belastet, so wird $\gamma_{r-1} l_{r-1} M_{r-2} + 2(\beta_{r-1} l_{r-1} + \alpha_r l_r) M_{r-1} + \gamma_r M_r = 0$, oder, weil jetzt $M_r = -\mu_r M_{r-1}$ ist, $\gamma_{r-1} l_{r-1} M_{r-2} + 2(\beta_{r-1} l_{r-1} + \alpha_r l_r) M_{r-1} - \gamma_r \mu_r l_r M_{r-1} = 0$. Diese Gleichung bleibt auch noch erfüllt, wenn das r^{te} Feld belastet ist, weil sich durch diese Belastung das Verhältniss von M_{r-2} und M_{r-1} nicht ändert. Ebenso wird $-\gamma_r \nu_r l_r M_r + 2(\beta_r l_r + \alpha_{r+1} l_{r+1}) M_r + \gamma_{r+1} l_{r+1} M_{r+1} = 0$. Die Subtraction dieser Gleichungen giebt, wenn man jetzt nur μ ν, γ statt μ_r, ν_r, γ_r setzt,

$$206. \quad \begin{cases} \gamma(\mu M_{r-1} + M_r) = \mathfrak{N}', \\ \gamma(M_{r-1} + \nu M_r) = \mathfrak{N}''. \end{cases}$$

Die Auflösung giebt

$$207. \quad M_{r-1} = \frac{\nu \mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{\gamma(\mu\nu - 1)}, \quad M_r = \frac{\mu \mathfrak{N}'' - \mathfrak{N}'}{\gamma(\mu\nu - 1)}.$$

Setzen wir hierin $\mu = \frac{l}{a} - 1$, $\nu = \frac{l}{b} = 1$, $l - a - b = c$, so wird

$$208. \quad \begin{cases} M_{r-1} = \frac{a}{\gamma c l}[(l-b)\mathfrak{N}' - b\mathfrak{N}''], \\ M_r = \frac{b}{\gamma c l}[(l-a)\mathfrak{N}'' - a\mathfrak{N}']. \end{cases}$$

Der Schwerpunkt der verzerrten Momentenfläche rückt am weitesten nach links, wenn die Belastung durch eine Einzellast erfolgt, welche am linken Ende des fraglichen Feldes liegt. Es ergiebt sich, dass in diesem Falle der Abstand des Schwerpunktes vom rechten Ende stets $> 2{,}3$ des Abstandes desselben vom linken Ende ist. Bei keiner anderen Belastungsweise kann der Schwerpunkt noch weiter nach links rücken. Nach der Erklärung von $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ in §. 93 ist demnach stets $\mathfrak{N}'' < 2{,}3\,\mathfrak{N}'$ und ebenso $\mathfrak{N}' < 2{,}3\,\mathfrak{N}''$. Da nun ferner $b < 0{,}3\,l$, also $l - b > 0{,}7\,l$ ist, so ist $(l-b)\mathfrak{N}' - b\mathfrak{N}''$, also auch M_{r-1}, stets positiv; dasselbe lässt sich von M_r nachweisen. Die Normalmomente an den Enden des belasteten Feldes sind also stets positiv.

XVI. Kapitel.

Einfluss des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung.

§. 97. **Allgemeines.** Der Gang, welchen man bei der Berechnung eines continuirlichen Trägers mit variablem Querschnitte zu befolgen pflegt, ist der, dass man zunächst die Berechnung unter der Annahme eines constanten Querschnittes durchführt, sodann nach den nach dieser Rechnung auf die einzelnen Querschnitte wirkenden Momenten die Querschnitte selbst bestimmt und für den so construirten Träger die Rechnung noch einmal unter Annahme eines variablen Querschnittes durchführt. Durch diese zweite Rechnung ändern sich nun allerdings die Momente und hierdurch auch die Querschnitte, so dass noch eine dritte und wohl auch eine vierte Rechnung nöthig würde. Für die Praxis ist indess die zweite Rechnung stets genügend: ja in den meisten Fällen hat man sich sogar mit der ersten Rechnung begnügt, d. h. man hat auf die Veränderlichkeit des Querschnittes keine Rücksicht genommen. Man wird sich bei der zweiten Rechnung der Wahrheit noch mehr nähern, wenn man bereits bei der ersten Berechnung den Einfluss der Veränderlichkeit der Querschnitte schätzungsweise berücksichtiget, wozu im Folgenden einiger Anhalt geboten werden soll.

Würde es sich nur um eine unveränderliche Belastung, also z. B. um eine totale gleichmässige Belastung handeln, so liesse sich von vornherein eine exacte Berechnung durchführen, wie in des Verfassers „Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Seite 153 bis 156“ gezeigt ist. Jedoch ist dies eben ein Fall, der für den Brückenbau wenig Bedeutung hat.

Die Coefficienten α, β und γ nehmen für eiserne Brücken mit Parallelträgern von *50* und *100 Meter* Spannweite ungefähr die folgenden Werthe an:

Anzahl und Verhältniss der Felder	*Spannweite = 50 Meter*					*Spannweite = 100 Meter*				
	I. Feld			*II. Feld*		*I. Feld*			*II. Feld*	
	α	β	γ	$\alpha=\beta$	γ	α	β	γ	$\alpha=\beta$	γ
Zwei Felder	*1,133*	*0,923*	*0,945*			*1,200*	*0,901*	*0,899*		
Drei Felder										
1:1,0:1	*1,055*	*0,860*	*0,881*	*1,205*	*1,225*	*1,076*	*0,808*	*0,806*	*1,330*	*1,376*
1:1,1:1	*1,105*	*0,901*	*0,921*	*1,101*	*1,120*	*1,122*	*0,842*	*0,841*	*1,144*	*1,152*
1:1,2:1	*1,114*	*0,907*	*0,929*	*1,024*	*1,063*	*1,165*	*0,885*	*0,893*	*1,042*	*1,078*
1:1,3:1	*1,184*	*0,943*	*0,992*	*0,931*	*0,947*	*1,256*	*0,943*	*0,942*	*0,925*	*0,946*

Wir haben ferner in folgender Tabelle die entsprechenden beiläufigen Werthe der Grössen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ bei ganzer und halber Belastung zusammengestellt:

Belastungsweise, Anzahl und Verhältniss der Felder	*Spannweite = 50 Met.*			*Spannweite = 100 Met.*		
	I. Feld	*II. Feld*		*I. Feld*	*II. Feld*	
	$\mathfrak{N}''$	$\mathfrak{N}'$	$\mathfrak{N}''$	$\mathfrak{N}''$	$\mathfrak{N}'$	$\mathfrak{N}''$
Total belastet:						
Zwei Felder	0,2343			0,2305		
Drei Felder:						
1 : 1 0 : 1	0,2184	0,3082	0,3082	0,2068	0,3450	0,3450
1 : 1,1 : 1	0.2284	0,2818	0,2818	0,2186	0,2968	0,2968
1 : 1,2 : 1	0,2303	0,2619	0,2619	0,2238	0,2704	0,2704
1 : 1,3 : 1	0,2448	0,2383	0,2383	0,2413	0,2398	0,2398
Linke Hälfte belastet:						
Zwei Felder	0,1101			0,0961		
Drei Felder:						
1 : 1,0 : 1	0,1026	0,1749	0,1333	0,0862	0,1974	0,1475
1 : 1,1 : 1	0,1074	0,1599	0,1219	0,0899	0,1698	0,1269
1 : 1,2 : 1	0,1082	0,1486	0,1133	0,0933	0,1547	0,1156
1 : 1,3 : 1	0,1151	0,1352	0,1031	0,1006	0,1373	0,1026
Rechte Hälfte belastet:						
Zwei Felder	0,1342			0,1344		
Drei Felder:						
1 : 1,0 : 1	0,1251	0,1333	0,1749	0,1206	0,1475	0,1974
1 : 1,1 : 1	0,1308	0,1219	0,1599	0,1257	0,1269	0,1698
1 : 1.2 : 1	0,1319	0,1133	0,1486	0,1305	0,1156	0,1547
1 : 1,3 : 1	0.1402	0,1031	0,1352	0,1407	0,1026	6,1373
	$.\,p\,l^2$	$.\,p\,l^2$		$.\,p\,l^2$	$.\,p\,l^2$	

Selbstverständlich können diese Werthe je nach der Construction der Träger mehr oder weniger variiren. Die angegebenen Zahlen setzen voraus, dass die Stützen in einer Geraden liegen; senkt man die Mittelstützen so weit, dass die positiven und negativen Maximalmomente möglichst gleich werden, so nähern sich die Werthe denen für einen constanten Querschnitt wesentlich mehr.

§. 98. **Das Eigengewicht.** In Betreff des Eigengewichtes ist zu dem im §. 81 bis 94 Gesagten nichts Weiteres hinzuzufügen. Der Gang der Rechnung bleibt mit den besprochenen Modificationen derselbe, wie bei constantem Querschnitte (Seite 58 bis 61).

Im Folgenden geben wir zur Schätzung des Einflusses der Veränderlichkeit des Querschnittes Näherungswerthe der Abweichungen m der Normalmomente von denjenigen für einen constanten Querschnitt.

1. **Träger mit zwei Feldern.** Hier wird $M = \frac{\mathfrak{N}''}{2\beta_1}$. Hiernach ergiebt sich für $l = 50$ und 100^m nach den im vorigen Paragraph aufgestellten Zahlen $M_1 = 0{,}1270\, g l^2$ und $0{,}1279\, g l^2$. Da nun für einen constanten Querschnitt $M_1 = 0{,}1250\, g l^2$ ist, so wird

$$l = 50^m: \; m_1 = + \, 0{,}0020\, g l^2; \quad l = 100^m: \; m_1 = + \, 0{,}0029\, g l^2.$$

Die Abweichung beträgt hiernach nur *1,6* und *2,3 Procent.*

2. **Träger mit drei Feldern.** Hier wird, wenn man das Verhältniss $\frac{l}{l_1}$ der Spannweiten $= n$ setzt,

$$M_1 = M_2 = \frac{\mathfrak{N}_1'' + n\mathfrak{N}_2'}{2\beta_1 + 2n\alpha_2 + n\gamma_2}.$$

Hiernach ergiebt sich, wenn man, wie früher, die mittlere Spannweite $\frac{1}{3}(2l_1 + l) = \lambda$ setzt,

Verhältniss	$\lambda = 50$ *Met.*	$\lambda = 100$ *Met.*
	m_1	m_1
1 : 1,0 : 1	$-\,0{,}0017$	$-\,0{,}0023$
1 : 1,1 : 1	$+\,0{,}0005$	$+\,0{,}0010$
1 : 1,2 : 1	$+\,0{,}0018$	$+\,0{,}0023$
1 : 1,3 : 1	$+\,0{,}0027$	$+\,0{,}0030$
	$\cdot\, g\lambda^2$	$\cdot\, g\lambda^2$

Sonach ergeben sich die Normalmomente in der Regel etwas grösser, als bei constantem Querschnitte.

Hiernach ist es nun auch leicht, die Abweichungen der übrigen Grössen zu schätzen. Die Abweichung der Transversalkraft ist im ersten Felde $= -\frac{m_1}{l_1}$, im zweiten Felde bei einem Träger mit drei Feldern $= 0$. Die Abweichung des Momentes ist im ersten Felde im Abstande x von der Stütze $0 = + \, m_1 \frac{x}{l_1}$, im zweiten Felde bei einem Träger mit drei Feldern constant $= + \, m_1$.

§. 99. Transversalkräfte in Folge der zufälligen Last.

1. Gefährlichste Belastungsweise.

Wir denken uns zunächst das fragliche Feld durch eine Einzellast G belastet. Da jede Last eine Durchbiegung nach unten, also jedenfalls eine zum Theil nach oben concave Krümmung oder zum Theil negative Momente erzeugt und das Maximum der negativen Momente am Angriffspunkte der Last stattfinden muss, so ist das Moment am Angriffspunkte der Last jedenfalls negativ. Ist dieses Moment M_1, so wird, die in §. 47 gebrauchten Bezeichnungen beibehaltend, $M_1 = M' - Q'\xi$, oder

$$Q' = \frac{M' - M_1}{\xi}.$$

Da nun aber nach §. 96 M' positiv, nach dem soeben Gesagten M_1 negativ ist, so ist Q' positiv. Ebenso ist $M_1 = M'' + Q''\xi_1$, also $Q'' = \frac{M_1 - M''}{\xi_1}$. Da nun M_1 negativ, M'' positiv ist, so ist Q'' negativ. An einem beliebigen Querschnitte ist also die Transversalkraft positiv oder negativ, je nachdem die Einzellast rechts oder links vom Querschnitte liegt. Hieraus ergiebt sich für die gefährlichste Belastungsweise des fraglichen Feldes sofort dieselbe Regel wie für einen constanten Querschnitt in §. 47.

Da auch beim variablen Querschnitte die Transversalkraft an einem beliebigen Querschnitte bei der Belastung der auf einander folgenden Felder nach §. 95 das Vorzeichen wechselt, so müssen die übrigen Felder auch hier abwechselnd belastet sein, so dass die in §. 47 für die ungünstigste Belastungsweise aufgestellten Regeln auch hier ihre volle Gültigkeit behalten.

2. Bestimmungen der grössten Transversalkräfte. Auch die in §. 48 und 49 gezeigte Bestimmung der grössten Transversalkräfte bleibt hier vollkommen gültig.

Im Folgenden haben wir Näherungswerthe der Abweichungen der Maximal-Transversalkräfte an den Enden und in der Mitte des Feldes von den entsprechenden Werthen für einen constanten Querschnitt zusammengestellt.

Anzahl u. Verhältniss der Felder	Spannweite	Erstes Feld				Zweites Feld	
		Positiv. Maximum		Negativ. Maximum		Positiv. Maximum	
		$x = 0$	$x = 0{,}5 l_1$	$x = 0{,}5 l_1$	$x = l_1$	$x = 0$	$x = 0{,}5 l$
2 Felder	50	− 0,0009	− 0,0011	− 0,0035	− 0,0019		
	100	− 0,0015	− 0,0021	− 0,0038	− 0,0029		
3 Felder							
1:1,0:1	50	+ 0,0092	+ 0,0048	− 0,0056	+ 0,0012	− 0,0081	− 0,0081
	100	+ 0,0134	+ 0,0067	− 0,0043	+ 0,0017	− 0,0120	− 0,0084
1:1,1:1	50	+ 0,0051	+ 0,0025	− 0,0056	− 0,0011	− 0,0038	− 0,0068
	100	+ 0,0070	+ 0,0035	− 0,0049	− 0,0028	− 0,0054	− 0,0106
1:1,2:1	50	+ 0,0022	+ 0,0010	− 0,0044	− 0,0029	+ 0,0002	− 0,0030
	100	+ 0,0042	+ 0,0015	− 0,0038	− 0,0030	− 0,0022	− 0,0068
1:1,3:1	50	− 0,0017	− 0,0011	− 0,0043	− 0,0039	+ 0,0027	+ 0,0012
	100	− 0,0012	− 0,0015	− 0,0017	− 0,0041	+ 0,0021	− 0,0007
	Met.	$.p\lambda$				$.p\lambda$	

Diese Zahlen sind nicht absolut, sondern mit Berücksichtigung des Vorzeichens der betreffenden Transversalkraft anzuwenden. So z. B. ist bei zwei Feldern für $x = l$ für einen constanten Querschnitt $= - 0{,}6250\, p l_1$, mithin für den variablen Querschnitt bei 50 Meter Spannweite $max\,(- Q) = - 0{,}6250\, pl - 0{,}0019\, pl = - 0{,}6269\, p l$.

Hiernach beträgt der Einfluss der Veränderlichkeit des Querschnittes höchstens *3 Procent*, ist aber in der Regel noch kleiner.

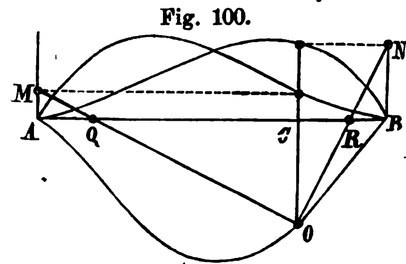
§. 100. Momente in Folge der zufälligen Last.

1. **Gefährlichste Belastungsweise.** Die in §. 50 für den constanten Querschnitt angewendete Methode zur Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise des fraglichen Feldes kann hier keine Anwendung finden, weil dieselbe auf der Einsetzung eines bestimmten Ausdruckes für die durch eine Einzellast mit variabler Lage erzeugten Normalmomente beruht, was hier nicht mehr möglich ist, so lange man nicht ein durch eine Gleichung ausdrückbares Gesetz für die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes des Querschnittes einführt.

Am rationellsten ist es hier, die Belastungsweise anzunehmen und für diese den Querschnitt zu ermitteln, für welchen die angenommene

Belastung die ungünstigste ist. Hierzu bestimmt man für eine Einzellast mit variabler Lage die Momente M', M'' an den Stützen des fraglichen Feldes und das Moment M_1 am Angriffspunkte der Last und stellt diese Momente als Ordinaten am Angriffspunkte der Last dar (Figur 100). Hiermit ist es nun leicht, die Geraden MO und NO zu ziehen, welche das Moment für irgend eine Lage der Einzellast repräsentiren. Diese Geraden schneiden die Axe in zwei Punkten Q und R, in welcher das Moment Null ist.

Fig. 100.



Liegt nun eine Last links von C, so ist das Moment in Q negativ, in R positiv; liegt eine Last rechts von C, so ist das Moment in Q positiv, in R negativ. Hieraus folgt, dass die Belastung der Strecke AC die ungünstigste in Betreff des positiven Momentes in R und des negativen in Q; die Belastung der Strecke BC die ungünstigste in Betreff des positiven Momentes in Q und des negativen in R ist.

Setzt man $AC = \xi$, $BC = \xi_1$, $AQ = x$, $BR = x_1$, so ist

$$x = \frac{M'\xi}{M' - M_1}, \quad x_1 = \frac{M''\xi_1}{M'' - M_1}.$$

Nun aber wird $M_1 = M' - (M' - M'')\frac{\xi}{l} - G\frac{\xi\xi_1}{l}$; dies in die vorigen Ausdrücke eingesetzt giebt:

$$x = \frac{M'l}{M' - M'' + G\xi_1}, \quad x_1 = \frac{M''l}{M'' - M' + G\xi}.$$

Um zu untersuchen, welcher Grenze sich x nähert, wenn die Last nach rechts rückt, setzen wir nach 208 $M' = \frac{1}{\gamma c l}\left[a(l - b)\mathfrak{N}' - ab\mathfrak{N}''\right]$, $M' - M'' = \frac{1}{\gamma c}\left[a\mathfrak{N}' - b\mathfrak{N}''\right]$. Dies eingesetzt giebt

$$x = \frac{(l - b)\mathfrak{N}' - b\mathfrak{N}''}{a\mathfrak{N}' - b\mathfrak{N}'' + \gamma c G\xi_1} a.$$

Nun aber wird in dem Falle, wo die Last ganz nahe am rechten Ende liegt, also das grösste Moment für den einfachen Träger $= G\xi_1$ wird, $\mathfrak{N}' = \frac{6\mathfrak{W}G\xi_1}{l^3}\int\frac{(xl - x^2)dx}{W} = 6G\xi_1\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3}\right) = (3B - 2C)G\xi_1$, $\mathfrak{N}'' = \frac{6\mathfrak{W}G\xi_1}{l^3}\int\frac{x^2dx}{W} = 6G\xi_1\frac{C}{3} = 2CG\xi_1$, wobei B und C die in §. 91 bezeichnete Bedeutung haben. Setzen wir noch $\gamma = 3B - 2C$, so wird

$$x = \frac{(3B - 2C)(l - b) - 2Cb}{(3B - 2C)a - 2Cb + (3B - 2C)c} a.$$

Da nun aber $a + c = l - b$ ist, so wird der Bruch $= 1$, mithin $x = a$. Sonach wird für $\xi_1 = o$, $x = a$ und ebenso für $\xi = o$, $x_1 = b$. **Die Punkte Q und R liegen also stets ausserhalb der beiden Fixpunkte und fallen nur mit diesen selbst zusammen, wenn der Angriffspunkt C der Einzellast bezüglich am Ende B oder A liegt.**

Für einen innerhalb der Fixpunkte gelegenen Querschnitt ist das Moment sonach stets negativ, wo auch die Einzellast liegen möge, so dass hier das Moment zum positiven oder negativen Maximum wird, je nachdem das fragliche Feld gar nicht oder total belastet ist.

Die Belastung der übrigen Felder bleibt dieselbe wie für den constanten Querschnitt nach §. 50.

Auch die Berechnung der Maximalmomente bleibt ganz dieselbe, wie sie für den constanten Querschnitt in §. 51 gezeigt wurde.

Im Folgenden haben wir Näherungswerthe der Abweichungen m der Normalmomente für diejenigen Belastungsweisen zusammengestellt, für welche die Momente an den Stützen und die Momente zwischen den Fixpunkten zum Maximum werden.

Spannweite, Anzahl und Verhältniss der Felder	*Belastung von I u. II*		*Belastung von I u. III*		*Belastung von II*	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
Spannw. = 50 Met.						
Zwei Felder ...	+ 0,0019				+ 0,0010	
Drei Felder....						
1:1,0:1	− 0,0012	− 0,0070	− 0,0092	− 0,0092	+ 0,0075	+ 0,0075
1:1,1:1	+ 0,0011	− 0,0051	− 0,0050	− 0,0050	+ 0,0056	+ 0,0056
1:1,2:1....	+ 0,0020	− 0,0021	− 0,0027	− 0,0027	+ 0,0039	+ 0,0039
1:1,3:1	+ 0,0036	− 0,0004	+ 0,0015	+ 0,0015	+ 0,0013	+ 0,0013
Spannw. = 100 Mt.						
Zwei Felder ...	+ 0,0029				+ 0,0015	
Drei Felder....						
1:1,0:1	− 0,0017	− 0,0103	− 0,0134	− 0,0134	+ 0,0110	+ 0,0110
1:1,1:1	− 0,0027	− 0,0084	− 0,0067	− 0,0067	+ 0,0089	+ 0,0089
1:1,2:1	− 0,0028	− 0,0054	− 0,0038	− 0,0038	+ 0,0060	+ 0,0060
1:1,3:1	− 0,0037	− 0,0012	+ 0,0010	+ 0,0010	+ 0,0019	+ 0,0019
	$\cdot p\lambda^2$		$\cdot p\lambda^2$		$\cdot p\lambda^2$	

Aus den Abweichungen der Normalmomente lassen sich nun leicht die Abweichungen der Momente an einem beliebigen Querschnitte bestimmen. Die Abweichung ist im ersten Felde im Abstande x von der Stütze $0 = m_1 \frac{x}{l_1}$ und im zweiten Felde im Abstande x von der Stütze $1 = m_1 - (m_1 - m_2) \frac{x}{l}$.

§. **101. Beispiel.** Tafel III. Wir wählen als Beispiel einen continuirlichen Parallelträger mit drei Oeffnungen von *50, 60, 50 Meter* Spannweite; hierbei sei das Eigengewicht pro Meter $g = 0{,}3q$ und die zufällige Last pro Meter $p = 0{,}7q$. Die Berechnung unter Annahme eines constanten Querschnittes giebt für die Gurte die in Fig. 1 dargestellten und mit Zahlen eingeschriebenen Querschnitte; diesen proportional sind die Trägheitsmomente.

1. **Bestimmung von** α, β, γ. Multiplicirt man die reciproken Werthe der Querschnitte mit den Längen der einzelnen Theile, so ergiebt sich als Gesammtsumme $0{,}006187\,l_1 + 0{,}006237\,l + 0{,}006187\,l_1 = 0{,}005800\lambda + 0{,}007016\lambda + 0{,}005800\,\lambda = 0{,}018616\,\lambda$. Der mittlere reciproke Werth ist daher $= \frac{0{,}018616\,\lambda}{3\lambda} = 0{,}006205$, die entsprechende mittlere Querschnittsfläche also $\frac{1}{0{,}006205} = 161{,}1$. Multiplicirt man hiermit die reciproken Querschnittsflächen, so erhält man die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{W}}{W}$, welche in Fig. 2 graphisch dargestellt und mit Zahlen eingeschrieben sind.

I. Feld. Die Krümmungsfläche ergiebt sich zu $0{,}9965\,l_1$, also ist nach §. 92, da hier $\mathfrak{W} = 1$ zu setzen ist, $A = \frac{0.9965\,l_1}{l_1} = 0{,}9965$. Als Trägheitsmoment der Krümmungsfläche für die beiden Enden ergiebt sich $0{,}3022\,l_1^{\,3}$ und $0{,}3800\,l_1^{\,2}$; nach §. 92 wird daher $\alpha = 3\,.\,0{,}3800$, $\beta = 3\,.\,0{,}3022$, $\gamma = 3A - \alpha - \beta$, d. i.

$$\alpha = 1{,}1400, \quad \beta = 0{,}9066, \quad \gamma = 0{,}9429.$$

II. Feld. In ganz gleicher Weise ergiebt sich für das II. Feld $A = 1{,}0046$ und

$$\alpha = 0{,}9943, \quad \beta = 0{,}9943, \quad \gamma = 1{,}0252.$$

2. **Bestimmung von $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ für eine Einzellast.** In folgender Tabelle sind die statischen und Trägheits-Momente der einzelnen Theile der Krümmungsfläche, sowie die hieraus durch successive Addition abgeleiteten statischen und Trägheits-Momente der vom Ende bis zu einer bestimmten Ordinate reichenden Flächenstücke in Beziehung auf die beiden Enden zusammengestellt:

Erstes Feld.

x	Trägheitsmoment für das linke Ende: einzeln	von 0 bis x T_1	von x bis l_1 T_1	Statisches Moment für das linke Ende: einzeln	von x bis l_1 S_1	Differenz $S_1 l_1 - T_1$
0	92	0	30218	1147	45994	15776
0,119	143	92	30126	945	44847	14721
0,173	328	235	29983	1548	43902	13999
0,250	1621	563	29655	4702	42354	12699
0,426	3701	2184	28034	7150	37652	9618
0,602	3005	5885	24333	4688	30502	6169
0,679	12277	8890	21328	15979	25814	4486
0,853	3192	21167	9051	3643	9835	784
0,898	2082	24359	5859	2277	6192	333
0,931	1767	26441	3777	1865	3915	138
0,962	2010	28208	2010	2050	2050	40
1		30218	0		0	0
$.l_1$	$.0{,}00001\,l_1^3$			$.0{,}00001\,l^2$		$0{,}00001\,l_1^3$

Zweites Feld.

x	Trägheitsmoment für das linke Ende: einzeln	von 0 bis x T_1	von x bis l T_2	Statisches Moment für das linke Ende: einzeln	von x bis l S_2	Differenz $S_2 l - T_2$
0	1	0	33143	25	50240	17097
0,030	4	1	33142	78	50215	17073
0,058	12	5	33138	172	50137	16999
0,089	37	17	33126	345	49965	16839
0,124	103	54	33089	711	49620	16231
0,165	514	157	32986	2497	48909	15923
0,241	477	671	32472	1769	46412	13940
0,296	903	1148	31995	2663	44643	12748
0,379	1855	2051	31092	4188	41980	10888
0,500	3008	3906	29237	5342	37790	8555
0,621	3466	6914	26229	5227	32450	6201
0,704	3526	10380	22763	4821	27223	4460
0,759	7821	13906	19237	9803	22402	3165
0,835	3594	21727	11416	4209	12599	1183
0,876	2586	25321	7822	2895	8390	568
0,911	2008	27907	5236	2168	5495	259
0,942	1628	29915	3228	1702	3327	99
0,970	1600	31543	1600	1585	1625	25
1		33143	0		0	0
$.l$	$.0{,}00001\,l^3$			$.0{,}00001\,l^2$		$0{,}00001\,l^3$

Die graphische Bestimmung der statischen und Trägheitsmomente ist in Fig. 3 nach §. 92 und 93 durchgeführt.

Mit Hülfe der so erhaltenen Zahlen lassen sich nun nach Formel 201 die Werthe von $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ berechnen. So z. B. ist im I. Felde für $x = 0{,}853\,l_1 : \mathfrak{N}'' = 6\,[0{,}147 \,.\, 0{,}2117 + 0{,}853 \,.\, 0{,}0078]\,G\,l_1 = 0{,}2266\,G\,l_1$. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Erstes Feld		*Zweites Feld*		
x	$\mathfrak{N}''$	x	$\mathfrak{N}'$	$\mathfrak{N}''$
0	0	0	0	0
0,119	0,1099	0,030	0,0582	0,0308
0,173	0,1560	0,058	0,1096	0,0595
0,250	0,2141	0,089	0,1631	0,0909
0,426	0,3204	0,124	0,2181	0,1259
0,602	0,3630	0,165	0,2720	0,1655
0,679	0,3535	0,241	0,3452	0,2317
0,853	0,2266	0,296	0,3725	0,2727
0,898	0,1670	0,379	0,3887	0,3236
0,931	0,1172	0,500	0,3735	0,3735
0,962	0,0666			
1	0			
$.\,l_1$	$.\,G l_1$	$.\,l$	$.\,G l$	$.\,G l$

3. **Lage der Fixpunkte.** Nach 204 wird

$$\mu_2 = \frac{2\,(0{,}9066 + 0{,}9943 \,.\, 1{,}2}{1{,}0252 \,.\, 1{,}2} = 3{,}4138,$$

$$\mu_3 = \frac{2\,(0{,}9943 \,.\, 1{,}2 + 0{,}9066) - \dfrac{1{,}0252 \,.\, 1{,}2}{3{,}4138}}{0{,}9429} = 4{,}0717.$$

Demnach wird $a_2 = \frac{l}{4{,}4138} = 0{,}2266\,l$, $a_3 = \frac{l_1}{5{,}0717} = 0{,}1972\,l_1$. Wir haben somit

I. Feld: $a = 0$, $c = 0{,}8028\,l_1$, $b = 0{,}1972\,l_1$,

II. Feld: $a = 0{,}2266\,l$, $c = 0{,}5468\,l$, $b = 0{,}2266\,l$.

4. **Bestimmung der Normalmomente für eine Einzellast.** I. Feld. Nach den Formeln 208 wird

$$M_1 = \frac{b}{\gamma c}\,\mathfrak{N}'' = \frac{0{,}1972}{0{,}9429 \,.\, 0{,}8028}\,\mathfrak{N}'' = 0{,}2605\,\mathfrak{N}''.$$

Das Moment am Angriffspunkte der Last wird jetzt

$$M' = -\frac{x}{l_1}\left(1-\frac{x}{l_1}\right)Gl_1 + \frac{x}{l_1}M_1 = -\frac{x}{l_1}\left(1-\frac{x}{l_1}\right)Gl + 0{,}2605\frac{x}{l_1}\mathfrak{N}''.$$

II. Feld. Nach 208 wird für die Belastung des II. Feldes

$$M_1 = \frac{a}{\gamma c l}[(l-a)\mathfrak{N}' - a\mathfrak{N}''],\quad M_2 = \frac{a}{\gamma c l}[(l-a)\mathfrak{N}'' - a\mathfrak{N}'],\ \text{d. i.}$$

$$M_1 = 0{,}3126\,\mathfrak{N}' - 0{,}0916\,\mathfrak{N}'',\quad M_2 = 0{,}3126\,\mathfrak{N}'' - 0{,}0916\,\mathfrak{N}'.$$

Das Moment M am Angriffspunkte der Last wird nun

$$M' = M_1 - \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)Gl - \frac{x}{l}(M_1 - M_2).$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

Erstes Feld			*Zweites Feld*			
x	M_1	M'	x	M_1	M_2	M'
0	0	0	0	0	0	0
0,119	0,02863	0,10143	0,030	0,01536	0,00480	0,01407
0,173	0,04064	0,13605	0,058	0,02982	0,00855	0,02599
0,250	0,05577	0,17356	0,089	0,04265	0,01348	0,04103
0,426	0,08346	0,20897	0,124	0,05663	0,01938	0,05686
0,602	0,09456	0,18267	0,165	0,06987	0,02682	0,07501
0,679	0,09209	0,15543	0,241	0,08667	0,04081	0,10730
0,853	0,05895	0,07512	0,296	0,09147	0,05112	0,12886
0,898	0,04350	0,05254	0,379	0,09187	0,06555	0,15346
0,931	0,03053	0,03582	0,500	0,08254	0,08254	0,16746
0,962	0,01735	0,01987				
1	0	0				
$.\,l_1$	$.\,Gl_1$	$.\,Gl_1$	$.\,l$	$.\,Gl$	$.\,Gl$	$.\,Gl$

5. **Normalmomente für partielle gleichmässige Belastung.** Die Normalmomente für eine Einzellast wurden in Fig. 4 graphisch dargestellt. Durch Bestimmung des Fläche inhaltes der von $x = 0$ bis $x = x$ und $x = x$ bis $x = l$ reichenden Flächenstücke mit Hülfe des Planimeters wurden die in folgender Tabelle zusammengestellten Normalmomente für partielle Belastung erhalten:

Belastung des I. Feldes			Belastung des II. Feldes		
x	von 0 bis x M_1	von x bis l M_1	x	von x bis l M_1	M_2
0	0	0,06086	0	0,05665	0,05665
0,1	0,00120	0,05966	0,1	0,05423	0,05583
0,2	0,00471	0,05615	0,2	0,04788	0,05332
0,3	0,01024	0,05062	0,3	0,03923	0,04904
0,4	0,01745	0,04341	0,4	0,03000	0,04301
0,5	0,02599	0,03487	0,5	0,02125	0,03540
0,6	0,03531	0,02555	0,6	0,01364	0,02665
0,7	0,04462	0,01624	0,7	0,00761	0,01742
0,8	0,05282	0,00806	0,8	0,00333	0,00877
0,9	0,05863	0,00223	0,9	0,00082	0,00242
1	0,06086	0	1	0	0
$.l_1$	$.pl_1^2$	$.pl_1^2$	$.l$	$.pl^2$	$.pl^2$

6. **Einfluss des Eigengewichtes.** Bei totaler Belastung des I. Feldes ist nach dem eben erhaltenen Resultate $M_1 = 0{,}06086\,pl_1^2 = 0{,}05349\,p\lambda^2$, $M_2 = -\frac{1}{\mu_2}M_1 = -0{,}2930\,M_1 = -0{,}01274\,pl_1^2 = 0{,}01567\,p\lambda^2$. Bei totaler Belastung des II. Feldes ist $M_1 = M_2 = 0{,}05665\,pl^2 = 0{,}07170\,p\lambda^2$. Hieraus folgt nun für eine totale Belastung aller drei Oeffnungen $M_1 = M_2 = (0{,}05349 + 0{,}07170 - 0{,}01567)\,p\lambda^2 = 0{,}10952\,p\lambda^2$, also ist für das Eigengewicht

$$M_1 = 0{,}10952\,g\lambda^2.$$

Hieraus ergiebt sich nun leicht in bekannter Weise

$$\begin{cases} \textit{I. Feld:} & Q = +\left(0{,}3519 - 0{,}9375\dfrac{x}{l_1}\right)g\lambda, \\ \textit{II. Feld:} & Q = +\left(0{,}5625 - 1{,}1250\dfrac{x}{l}\right)g\lambda. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textit{I. Feld:} & M = -\left(0{,}32994 - 0{,}4395\dfrac{x}{l_1}\right)g\lambda^2, \\ \textit{II. Feld:} & M = +\left(0{,}10952 - 0{,}6328\dfrac{x}{l} + 0{,}6328\dfrac{x^2}{l^2}\right)g\lambda^2. \end{cases}$$

7. **Transversalkräfte in Folge der zufälligen Belastung.** I. Feld. Q wird zum positiven Maximum bei Belastung des rechten Theiles des I. Feldes und bei totaler Belastung des III. Feldes. Für die Belastung

des III. Feldes wird $M_1 = -0{,}2930 \,.\, 0{,}06086 p l_1^2 = -0{,}01783 p l_1^2$. Setzen wir für die Belastung des I. Feldes $M_1 = k p l_1^2$, wobei k aus der Tabelle zu Nr. 5 zu entnehmen ist, so ist $M_1 = (k - 0{,}01783) p l_1^2$ $= - Q_t' l + \frac{1}{2} p (l_1 - x)^2$ und $max\,(+Q) = Q'$, d. i.

$$max\,(+Q) = \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 - k + 0{,}01783\right] p l_1$$

$$= 0{,}9375 \left[0{,}5 \left(1 - \frac{x}{l_1}\right)^2 - k + 0{,}01783\right] p \lambda.$$

Das negative Maximum von Q berechnet man am besten nach der Regel $max\,(-Q) = Q_t - max\,(+Q)$.

II. Feld. Q wird zum positiven Maximum bei Belastung des rechten Theiles des II. Feldes und bei totaler Belastung des I. Feldes. Für die Belastung des I. Feldes ist $M_1 = 0{,}06086 p l_1^2 + 0{,}04226 p l^2$ $M_2 = -0{,}2930\, M_1 = -0{,}01238 p l^2$. Setzen wir für die Belastung des II. Feldes $M_1 = k_1 p l^2$, $M_2 = k_2 p l^2$, wobei k_1 und k_2 aus der Tabelle zu Nr. 5 zu entnehmen sind, so ist $M_1 = (k_1 + 0{,}04226) p l^2$, $M_2 = (k_2 - 0{,}01238) p l^2$. Es wird nun $max\,(+Q) = Q_2' = \frac{1}{2} p (l - x)^2$ $+ \frac{M_1 - M_2}{l}$, d. i.

$$max\,(+Q) = \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + 0{,}0546 + k_1 - k_2\right] p l$$

$$= 1{,}1250 \left[0{,}5 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + 0{,}0546 + k_1 - k_2\right] p \lambda.$$

Das negative Maximum ist dadurch bestimmt, dass die absoluten Werthe von $max\,(+Q)$ für x und von $max\,(-Q)$ für $l - x$ einander gleich sind.

Hiernach ist nun die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	*Transversalkraft*		
	Einfluss v. g	*Einfluss von p*	
	Q	$max\,(+Q)$	$max.\,(-Q)$
I. Feld		+	—
0	+ 0,3519	0,4283	0,0764
0,1	+ 0,2582	0,3405	0,0823
0,2	+ 0,1652	0,2640	0,0988
0,3	+ 0,0607	0,1990	0,1383
0,4	— 0,0231	0,1448	0,1679
0,5	— 0,1168	0,1011	0,2179
0,6	— 0,2106	0,0677	0,2783
0,7	— 0,3043	0,0437	0,3480
0,8	— 0,3981	0,0278	0,4259
0,9	— 0,4918	0,0193	0,5111
1	— 0,5856	0,0167	0,6023

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	*Transversalkraft*		
	Einfluss v. g	*Einfluss von p*	
	Q	$max\,(+M)$	$max.(-M)$
II. Feld		+	—
0	+ 0,5625	0,6240	0,0615
0,1	+ 0,4500	0,5153	0,0653
0,2	+ 0,3375	0,4154	0,0779
0,3	+ 0,2250	0,3260	0,1010
0,4	+ 0,1125	0,2498	0,1368
0,5	0	0,1862	0,1862
	$.g\lambda$	$.p\lambda$	$.p\lambda$

8. **Momente in Folge der zufälligen Belastung.** I. Feld. Im ersten Theile, d. i. von $x = 0$ bis $x = 0{,}8023\,l_1$ wird M bei Belastung des II. Feldes zum positiven Maximum. Hierbei ist $M_1 = 0{,}05665pl^2 = 0{,}07170p\lambda^2$, daher

$$max\,(+M) = +\,0{,}07170\frac{x}{l_1}p\lambda^2.$$

Da bei totaler Belastung aller drei Felder $M = -\left(0{,}3299\frac{x}{l_1} - 0{,}4395\frac{x^2}{l_1^2}\right)p\lambda^2$ ist, so wird $max\,(-M) = -\left(0{,}3299\frac{x}{l_1} - 0{,}4395\frac{x^2}{l_1^2}\right)p\lambda^2 - 0{,}07170\frac{x}{l_1}p\lambda^2$, d. i.

$$max\,(-M) = -\left(0{,}4016 - 0{,}4395\frac{x}{l_1}\right)\frac{x}{l_1}p\lambda^2.$$

Im zweiten Theile, d. i. von $x = 0{,}8023\,l_1$ bis $x = l_1$ wird M zum positiven Maximum, wenn der linke Theil des I. Feldes auf eine gewisse Länge ξ belastet ist. Die Construction (Fig. 4) giebt für

$\xi =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	$1\,.\,l_1$.
$x =$	0,802	0,813	0,838	0,863	0,910	0,951	$1\,.\,l_1$.

Das entsprechende Moment M_1 ist durch obige Tabelle bestimmt. Ausserdem muss das II. Feld total belastet sein; für diese Belastung ist $M_1 = 0{,}05665\,p\,l_1^2 = 0{,}08158\,p\,l_1^2$, was dem aus der Tabelle zu entnehmenden Momente hinzuzufügen ist. Alsdann wird nach Formel 60 (Seite 73) $max\,(+M) = \frac{M_1 x}{l_1} - \frac{p\xi^2(l_1 - x)}{2l_1}$, d. i.

$\xi =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	$1\,.\,l_1$
$M_1 =$	0,08158	0,08629	0,09903	0,11689	0,13438	0,14020	$0{,}14244\,.\,pl_1^2$,
$max\,(+M) =$	0,06543	0,06641	0,07003	0,07622	0,09349	0,11349	$0{,}14244\,.\,pl_1^2$,
$=$	0,05751	0,05837	0,06155	0,06699	0,08217	0,09975	$0{,}12519\,.\,p\lambda^2$.

II. Feld. Im ersten Theile, d. i. von $x = 0$ bis $x = 0{,}2256\,l$ wird M zum positiven Maximum, wenn der rechte Theil des zweiten Feldes auf eine gewisse Länge belastet ist. Durch die Construction (Fig. 4) ergiebt sich für den Abstand ξ des Zugendes vom linken Ende des Feldes:

$$\begin{array}{lllllllll} \xi = 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & .\,l, \\ x = 0 & 0{,}050 & 0{,}093 & 0{,}144 & 0{,}175 & 0{,}200 & 0{,}226 & .\,l. \end{array}$$

Die entsprechenden Momente M_1 und M_2 sind durch obige Tabelle bestimmt. Ausserdem muss das ganze erste Feld belastet sein; für diese Belastung ist nach Nr. 6 $M_1 = 0{,}06086\,p\,l_1^2 = 0{,}04226\,p\,l^2$, $M_2 = -\,0{,}01238\,p\,l^2$. Es wird nun nach Formel 60 (Seite 73): $max\,(+M) = M_1 - (M_1 - M_2)\frac{x}{l} - \frac{p\,x\,(l-\xi)^2}{2\,l}$. Hiernach wird nun:

$$\begin{array}{lllllllll} \xi = & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & .\,l, \\ M_1 = & 0{,}09891 & 0{,}09649 & 0{,}09014 & 0{,}07226 & 0{,}05590 & +0{,}04559 & +0{,}04226 & .\,p\,l^2, \\ M_2 = & 0{,}04417 & 0{,}04330 & 0{,}04084 & 0{,}03053 & 0{,}01417 & -0{,}00372 & -0{,}01248 & .\,p\,l^2, \\ max(+M) = & 0{,}09891 & 0{,}07358 & 0{,}05579 & 0{,}04033 & 0{,}03459 & 0{,}03182 & 0{,}02988 & .\,p\,l^2, \\ = & 0{,}12519 & 0{,}09312 & 0{,}07061 & 0{,}05104 & 0{,}04377 & 0{,}04029 & 0{,}03782 & .\,p\,\lambda^2. \end{array}$$

Im zweiten Theile, d. i. von $x = 0{,}2256\,l$ bis $0{,}7744\,l$ wird M zum positiven Maximum bei totaler Belastung des I. und III. Feldes. Für diese Belastung wird $M_1 = M_2 = 0{,}04226\,p\,l^2 - 0{,}01238\,p\,l^2 = 0{,}02988\,p\,l^2 = 0{,}03782\,p\,\lambda^2$. Wir haben daher an jeder Stelle

$$max\,(+M) = 0{,}03782\,p\,\lambda^2.$$

Das negative Maximum findet man nun leicht durch Subtraction des positiven vom Momente für totale Belastung. Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ / $\frac{\xi}{l}$	Moment: Einfluss v. g: M	Moment: Einfluss von p: $max\,(+M)$	Moment: Einfluss von p: $max\,(-M)$
I. Feld			+	—
0		0	0	0
0,1		— 0,02860	0,00717	0,03577
0,2		— 0,04841	0,01434	0,06275
0,3		— 0,05943	0,02151	0,08094
0,4		— 0,06166	0,02868	0,09034
0,5		— 0,05510	0,03585	0,09095
0,6		— 0,03974	0,04302	0,08276
0,7		— 0,01560	0,05019	0,06579
0,8		+ 0,01733	0,05736	0,04003

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ / $\frac{\xi}{l}$	Moment: Einfluss v. g	Moment: Einfluss von p	
		M	max (+ Q)	max (— Q)
0,802	0	+ 0,01808	0,05741	0,03943
0,813	0,2	+ 0,02226	0,05887	0,03612
0,838	0,4	+ 0,03215	0,06155	0,02940
0,863	0,6	+ 0,04259	0,06699	0,02440
0,910	0,8	+ 0,06370	0,08217	0.01847
0,951	0,9	+ 0,08371	0,09975	0,01640
1	1	+ 0,10952	0,12519	0,01567
II. Feld			+	—
0	0	+ 0,10952	0,12519	0,01567
0,050	0,1	+ 0,07946	0,09312	0,01366
0,093	0,2	+ 0,05618	0,07061	0,01443
0,144	0,4	+ 0,03134	0,05104	0,01970
0,175	0,6	+ 0,01821	0,04377	0,02556
0,200	0,8	+ 0,00831	0,04029	0,03108
0,226	1	— 0,00113	0,04029	0,03895
0,3		— 0,02333	0,03782	0,06115
0,4		— 0,04281	0,03782	0,08013
0,5		— 0,04864	0,03782	0,08646
		$.g\lambda^2$	$.p\lambda^2$	$.p\lambda^2$

Die Transversalkräfte und Momente sind in Fig. 5 und 6 graphisch dargestellt.

III. Graphische Behandlung unter Annahme eines constanten Querschnittes.

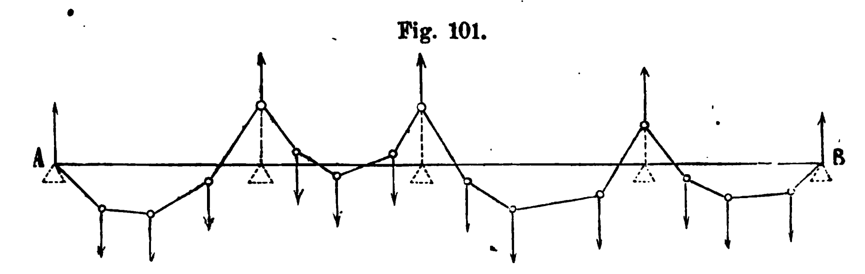
XVII. Kapitel.

Allgemeines.

§. 102. **Das erste Seilpolygon.** Aus der Belastung und den Stützendrücken eines continuirlichen Trägers lässt sich ein Seilpolygon (wir nennen es das erste Seilpolygon) construiren, welchem die früher erörterten Eigenschaften zukommen. Von Wichtigkeit ist insbesondere die Eigenschaft, dass das Moment an einer beliebigen Stelle gleich dem Producte aus der angenommenen Poldistanz und der verticalen Höhe zwischen dem Seilpolygone und der Schlusslinie ist.

Die Seilpolygone in den einzelnen Oeffnungen sind genau dieselben wie bei einem einfachen Träger (Fig. 101), und überhaupt nur von der Belastung abhängig, so dass sich dieselben bei gegebener Belastungsweise construiren lassen. Für die Grössen der Momente ist es dabei indess nicht

Fig. 101.



nöthig, dass die Schlusslinien in den einzelnen Oeffnungen eine Gerade bilden. Man kann sich vielmehr die Figur so verschoben denken, dass die Schlusslinien in den einzelnen Oeffnungen eine gebrochene Linie bilden. Unbekannt ist nun aber vor der Hand die Lage der Schlusslinien in den einzelnen Oeffnungen. Dieselben lassen sich eintragen, wenn man die Momente an den Stützen oder die Normalmomente kennt, so dass es unsere Hauptaufgabe sein wird, die Normalmomente zu bestimmen.

§. **103. Graphische Darstellung der elastischen Linie.** Die Differenzialgleichung der elastischen Linie ist bekanntlich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EW}.$$

Die Differenzialgleichung einer Seilkurve mit der Belastung q pro horizontale Längeneinheit und der constanten Horizontalspannung H ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H}.$$

Hieraus geht hervor, dass die elastische Linie eine Seilcurve ist, für welche die (variable) Last pro Längeneinheit das Moment M oder der Quotient $\frac{M}{W}$ und die Horizontalspannung H bezüglich EW oder E ist.

Man hat also die vom ersten Seilpolygone gebildete Momentenfläche als Belastungsfläche anzusehen und hierzu die Seilcurve zu bestimmen.

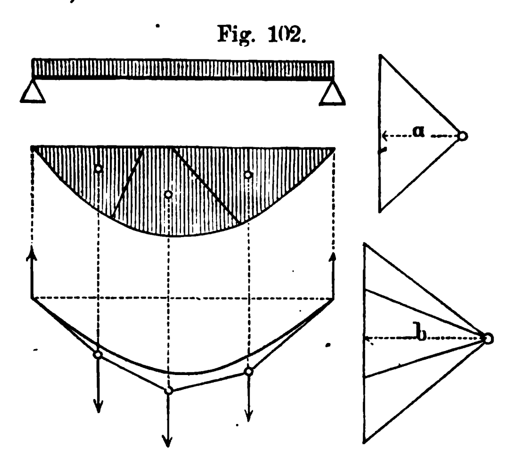
In dieser Weise wurde die graphische Darstellung der elastischen Linie zuerst von Mohr gezeigt.

Wählt man die Horizontalspannung H nicht $= EW$ oder E, sondern $\frac{1}{n} EW$ oder $\frac{1}{n} E$, so werden die Ordinaten der elastischen Linie n mal

grösser. Würde man $\frac{1}{n}$ gleich der Verkleinerung der Längendimensionen in der Zeichnung wählen, so würde man auf der Zeichnung die Ordinaten der elastischen Linie in wahrer Grösse erhalten.

Wenn man die Momentenfläche durch Verticalen in mehrere Flächenstücke theilt und die Flächen derselben in ihren Schwerpunkten wirkend denkt, so bestimmen diese Kräfte nach dem Früheren ein Seilpolygon, welches die elastische Linie in der Verticalen, welche die einzelnen Flächen von einander trennen, tangirt, wornach sich beliebig viele Tangenten der elastischen Linie construiren lassen. Flächen, welche positiven oder negativen Momenten entsprechen, sind natürlich im Kräftepolygone im entgegengesetzten Sinne aufzutragen.

Fig. 102.



Nimmt man eine Theilung durch nicht verticale Linien vor (Fig. 102), so sind die Richtungen der äusseren Polygonseiten mit denen für die verticale Theilung identisch, weil die verticale Höhe zwischen den entsprechenden Strahlen des Kräftepolygones der Gesammtlast entspricht. Die äusseren Polygonseiten werden also auch in diesem Falle Tangenten an die elastische Linie in den Endpunkten des in Rede stehenden Stückes derselben bilden. Hierbei können natürlich auch einzelne Flächentheile negativ sein.

§. **104. Das zweite Seilpolygon.** Handelt es sich nicht um die wirkliche Form der elastischen Linie, sondern nur um die äusseren Kräfte und ihre Momente, so genügt die Kenntniss der Lage der Tangenten der elastischen Linie an den Pfeilern, welche wir Pfeilertangenten nennen. Am besten denkt man sich hier die Momentenfläche als Differenz des Trapezes $A'A''B''B'$ und der Fläche $A''C''B''$ (Fig. 103), oder

$$= \triangle A'A''B'' + \triangle A'B'B'' - \text{Fläche } A''C''B''.$$

Die Fläche $A''C''B''$ nennen wir die einfache Momentenfläche. Bezeichnen wir die Normalmomente $A'A''$ und $B'B''$ mit M' und M'', so ist bei der Spannweite l

$$\triangle A'A''B'' = \tfrac{1}{2}M'l, \quad \triangle A'B'B'' = \tfrac{1}{2}M''l.$$

Wir bezeichnen ferner die Höhe eines Rechteckes mit der Basis l und der Fläche $A''C''B''$ oder den Mittelwerth der Momente des entsprechenden einfachen Trägers mit $\mathfrak{M}$; alsdann ist:

$$\textit{Fläche } A''C''B'' = \mathfrak{M} l.$$

Die durch die Schwerpunkte der Dreiecke gehenden Verticalen theilen die Spannweite in drei gleiche Theile. Wir nennen diese Verticalen die **Drittelverticalen**. Die Last $\mathfrak{M} l$ ist im Schwerpunkte der Fläche $A''B''C''$ wirkend zu denken.

Fig. 103.

Das aus diesen, als Kräfte gedachten, Flächen zu construirende Seilpolygon mit vier Seiten nennen wir das **zweite Seilpolygon**.

Die Poldistanz b wird hierbei nach dem Obigen $= \frac{1}{n} EW$ zu wählen sein. Wir wählen indess, was auf dasselbe hinausläuft, die Kräfte $GF = \frac{1}{2} M' \frac{l}{\lambda}$, $EH = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{\lambda}$, $FE = \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$ und die Poldistanz $b = \frac{EW}{n\lambda}$, wenn λ eine vor der Hand beliebige Länge bezeichnet. Man kann dafür eine mittlere Spannweite, d. h. das arithmetische Mittel aller Spannweiten, oder eine der wirklichen Spannweiten wählen. Sind die äusseren Oeffnungen gleich lang ($= l_1$) und ebenso sämmtliche mittlere Oeffnungen gleich lang ($= l$), so wählt man für λ am besten die Länge l der mittleren Felder. Wären alle Spannweiten $= l$, so würde man natürlich $\lambda = l$ wählen, da alsdann die Kräfte $= \frac{1}{2} M'$, $\frac{1}{2} M''$ und $\mathfrak{M}$ würden.

Wäre die Lage der Pfeilertangenten gegeben, so würde sich das Seilpolygon leicht in folgender Weise zeichnen lassen. Auf zwei Verticalen, welche von der durch S gehenden Verticalen den Abstand b haben, trägt man die Grösse $A = \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$ auf und verbindet die so erhaltenen Punkte

durch zwei sich kreuzende Linien, die sogen. Kreuzlinien, welche die Strahlen für das Kräftepolygon darstellen. Macht man jetzt UU' und VV' gleich den vertical unter U und V liegenden Abständen der Kreuzlinien, so gehen die Verlängerungen von VS und US durch U' und V'.

In dieser Form wurde das zweite Seilpolygon zuerst von Mohr dargestellt.

§. 105. **Bestimmung der Normalmomente.** Zieht man im Kräftepolygone parallele Strahlen zu den vier Seiten des zweiten Seilpolygones, so sind die Strecken auf der Kraftlinie, welche zwischen den Parallelen zu AU, BV (Fig. 103) und denen zu SU, SV liegen, bezüglich $FG = \frac{1}{2} M' \frac{l}{\lambda}$, $EH = \frac{1}{2} M'' \frac{l}{\lambda}$. Verlängert man SU und SV bis zum Durchschnitte M und N mit den Pfeilerverticalen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke UAM und VBN mit den Dreiecken OGF und OHE, wenn wir die Strecken AM und BN bezüglich mit y' und y'' bezeichnen: $y' : \frac{1}{2} M' \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{3} l : b$ und $y'' : \frac{1}{2} M'' \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{3} l : b$, also:

$$y' = \frac{M' l^2}{6 b \lambda}, \quad y'' = \frac{M'' l^2}{6 b \lambda}.$$

Die Strecken AM und BN sind demnach den Normalmomenten M' und M'' proportional.

Die Bestimmung der Normalmomente selbst aus den Strecken AM und BN kann nun in verschiedener Weise erfolgen:

1. Im Allgemeinen ist es am besten, die zweite Poldistanz $= \frac{1}{6} \lambda$ zu wählen. Alsdann wird

$$M' = y' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2, \quad M'' = y'' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2.$$

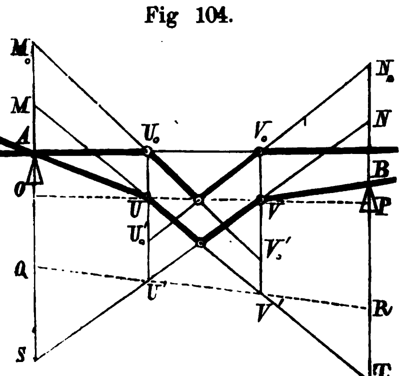
Zieht man in den Abständen $2b \left(\frac{\lambda}{l}\right) = \frac{1}{3} \frac{\lambda}{l} \lambda$ von U und V Verticalen, so sind die Strecken $A_1 M_1$ und $B_1 N_1$, welche auf denselben von den verlängerten Seiten des zweiten Seilpolygons abgeschnitten werden, offenbar gleich M' und M''.

2. Nimmt man $\lambda = l$ an, so wird unmittelbar $M' = y'$, $M'' = y''$. In den inneren Feldern erhält man also, wenn man die Länge derselben für λ wählt, die Normalmomente direct.

3. Für ein Feld, an welches ein Feld, dessen Länge $= \lambda$ gewählt wurde, anstösst, erhält man das Normalmoment an der zwischenliegenden Stütze ebenfalls direct durch das letztere Feld. Haben die inneren Felder gleiche Länge l und ebenso die beiden äusseren Felder gleiche Länge l_1, so kann man sonach sämmtliche Normalmomente direct erhalten.

§. 104. Vergleich mit dem horizontal eingespannten Träger. Sind die Enden horizontal eingespannt, so fallen im Kräftepolygone die zu AU und BV parallelen Strahlen zusammen; es wird demnach, wenn wir jetzt die Endmomente mit $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ bezeichnen, $\frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'') = \mathfrak{M}$. Demnach werden im ersten Seilpolygone die auf beiden Seiten der Schlusslinie liegenden Momentenflächen einander gleich.

Fig 104.



Bezeichnen wir die Punkte für diesen Fall mit dem Index 0 (Fig. 104), so wird $\triangle AU_0M_0 \cong \triangle UV_0V_0'$, mithin $AM_0 = V_0V_0' = VV'$, ebenso $BN = U_0U'_0 = UU'$, oder wenn die Poldistanz $b = \frac{1}{6}\lambda$ gewählt wird,

$$UU' = \mathfrak{M}'\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \quad VV' = M''\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Demnach sind die Abstände der Kreuzlinien in den durch U und V gehenden Verticalen den Momenten $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ für horizontale Einspannung proportional. Für $\lambda = l$, $b = \frac{1}{6}l$ würden dieselben direct $= \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$.

Zieht man durch U' und V' eine Gerade, welche die Pfeilerverticalen in Q und R schneidet und verlängert NU' und NV' bis zum Durchschnitte S und T mit den Pfeilerverticalen, so ist $QM = 2 . UU'$, $QS = VV'$, also $MS = 2UU' + VV' = (2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ und ebenso $NT = (2\mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}')\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, d. i. nach der in §. 36 durch Formel 11 eingeführten Bezeichnung: $MS = \mathfrak{N}'\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$; $NT = \mathfrak{N}''\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$. Ebensogross sind die Abstände der Kreuzlinien in den Pfeilerverticalen. Bezeichnen wir diese mit T' und T'', so haben wir

$$T' = \mathfrak{N}'\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \quad T'' = \mathfrak{N}''\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Die Abstände der Kreuzlinien in den Pfeilerverticalen sind demnach den Grössen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ proportional.

Man kann hiernach auch leicht die Grössen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ oder $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ zur Construction der Kreuzlinien verwenden.

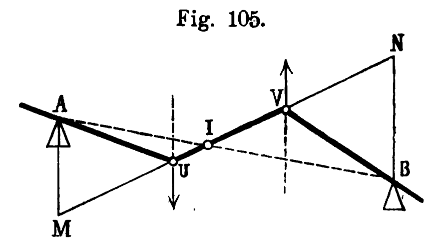
Zieht man durch U und V eine Gerade, welche die Pfeilerverticalen in O und P schneidet, so ist $OM = VV'$, $PN = UU'$; demnach sind sie die Strecken AO und $BP = (\mathfrak{M}' - M')\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, $(\mathfrak{M}'' - M'')\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$; sie geben alsdann den Unterschied der Normalmomente gegen die bei horizontaler Einspannung entstehenden Momente an.

XVIII. Kapitel.

Belastung einzelner Felder.

§. **107. Nicht belastetes Feld.** Wenn es sich um eine Oeffnung handelt, welche nicht belastet ist, so ist das zweite Seilpolygon nur aus den beiden Kräften $\frac{1}{8} M' l$ und $\frac{1}{8} M'' l$ zu construiren. Ist die Lage der Pfeilertangenten gegeben, so ist das Seilpolygon vollkommen bestimmt. Verlängert man die mittlere Seite UV (Fig. 105) bis zum Durchschnitte M und N mit den Pfeilerverticalen, so ist nach dem vorigen Paragraph $AM = M'\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, $BN = M''\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, also $AM : BN = M' : M''$. Zieht man noch die Gerade AB, welche UV in J schneidet, so ist für den Punkt J das Moment Null oder: der Durchschnittspunkt J der die Stützen verbindenden Geraden AB mit der mittleren Seite UV des zweiten Seilpolygones entspricht dem Wendepunkte der elastischen Linie.

Fig. 105.

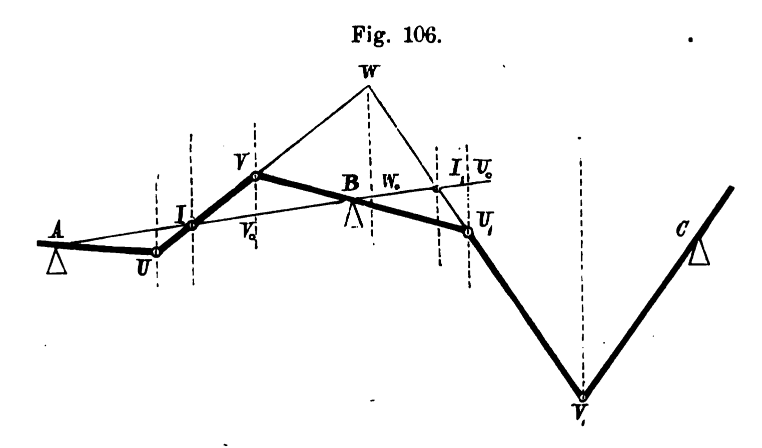


Die Transversalkraft ist im ganzen Felde constant. Ist α der Neigungswinkel der Momentenlinie gegen die horizontale Schlusslinie, so folgt aus dem ersten Kräftepolygone mit der Poldistanz a sofort $Q = a \tan \alpha$.

§. **108. Zwei aufeinander folgende nicht belastete Felder.** Verlängern wir die mittleren Seiten UV und $U_1 V_1$ (Fig. 106) der Seilpolygone zweier auf einander folgender nicht belasteter Felder mit den Längen l und l_1, so schneiden sich die Verlängerungen in einem Punkte W, welcher in der Richtung der Mittelkraft der in V und U_1 wirkenden Kräfte liegt. Da diese Kräfte $\frac{1}{8} M_1 l$ und $\frac{1}{8} M_1 l_1$ sind, so verhält sich $W_0 V_0 : W_0 U_0 = l_1 : l$. Da aber die Horizontalprojection von $V_0 U_0 = \frac{1}{8}(l + l_1)$ ist, so wird die Horizontalprojection von $V_0 W_0 = \frac{1}{8} l_1$,

die von $U_0 W_0 = \frac{1}{8} l$, und die von $B_0 W_0 = \frac{1}{8} (l_1 - l)$. Wir nennen die durch W_0 gehende Verticale, deren Lage sich hiernach leicht angeben lässt, die verschränkte Pfeilerverticale.

Fig. 106.



Fassen wir nun die Durchschnittspunkte J und J_1 der mittleren Seiten des Seilpolygones mit der durch A und B gehenden Geraden näher in's Auge. Es verhält sich $J_1 U_0 : J_1 W_0 = U_0 U_1 : W_0 W$; nun aber verhält sich auch $U_0 U_1 : V_0 V = B U_0 : B V_0 = l_1 : l$, $W_0 W : V_0 V = J W_0 : J V_1$; hieraus folgt leicht:

$$J_1 U_0 : J_1 W_0 = J V_0 \cdot l_1 : J W_0 \cdot l.$$

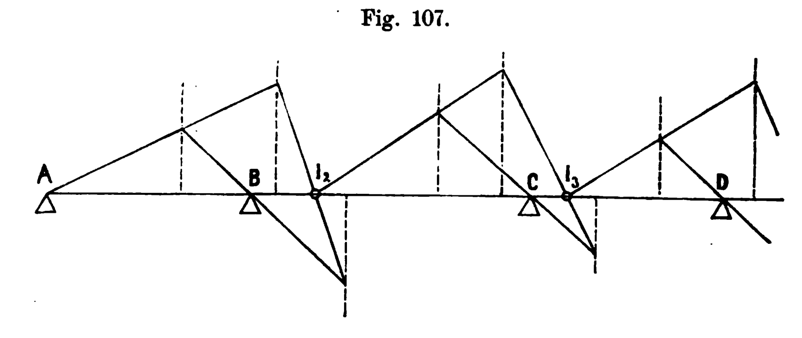
Das Verhältniss, in welchem $W_0 U_0$ durch den Punkt J_1 getheilt wird, hängt also bei gegebenen Spannweiten nur von dem Verhältnisse $J V_0 : J W_0$ oder von der Lage des Punktes J ab. Legt man also durch den Punkt J verschiedene Seilpolygone, so bleibt auch der Punkt J_1 derselbe oder noch allgemeiner: Bewegt sich der Punkt J bei verschiedener Höhenlage der Stützen und bei beliebigen Seilpolygonen in ein und derselben Verticalen, so bewegt sich auch der Punkt J_1 in ein und derselben Verticalen.

Wenn die Stützen in einer Geraden liegen, so sind die Punkte J und J_1 die Wendepunkte der elastischen Linie; hier gilt also der Satz: Wenn bei verschiedenen Seilpolygonen der Wendepunkt J derselbe bleibt, so bleibt auch der Wendepunkt J_1 derselbe.

Aus dem Punkte J lässt sich leicht der Punkt J_1 construiren. Man hat nur nöthig, durch J eine beliebige Gerade zu ziehen, welche die Verticale durch V_0 und die verschränkte Pfeilerverticale in V und W schneidet. Durch V und B zieht man eine Gerade, welche die Verticale durch U_0 in U_1 schneidet. Verbindet man jetzt U_1 mit W, so schneidet $U_1 W$ die Verlängerung von AB im Punkte J_1.

§. **109. Die Fixpunkte.** Es seien vom linken Ende A (Fig. 107) aus mehrere Felder unbelastet. Das Ende A bildet alsdann, weil hier das Moment stets Null sein muss, einen Wendepunkt. Aus diesem lässt sich nach dem vorigen Paragraphe der Wendepunkt J_2 für das zweite Feld BC construiren; aus diesem wieder der Wendepunkt J_3 für das dritte Feld u. s. f. Da diese Wendepunkte unter der Voraussetzung, dass sämmtliche Stützen in einer Geraden liegen, ihre Lage nicht ändern, welches auch die Belastung der belasteten Felder, und welche Felder auch belastet sein mögen, so nennen wir sie die Fixpunkte.

Fig. 107.



Eine zweite Reihe von Fixpunkten lässt sich in gleicher Weise construiren, wenn mehrere Felder vom rechten Endfelde aus unbelastet sind, so dass es zwei Reihen von Fixpunkten giebt. In den Endfeldern bilden die Endstützen Fixpunkte.

Aus der Construction geht unmittelbar hervor, dass die Fixpunkte stets innerhalb der äusseren Drittel der Felder liegen müssen.

Die Construction der Fixpunkte ist bei der graphischen Behandlung eines continuirlichen Trägers die erste Operation. Taf. IV, Fig. I, zeigt die vollständige Construction.

Diese Construction der Fixpunkte wurde zuerst von Mohr angegeben.

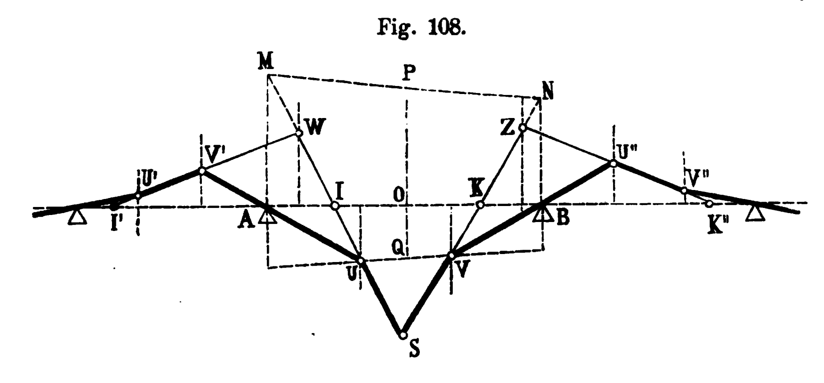
§. **110. Transversalkräfte, Stützendrücke und Momente in den unbelasteten Feldern.** Das Seilpolygon in den unbelasteten Feldern bildet eine gebrochene Linie, deren Ecken in den Pfeilerverticalen liegen, und welche für den Fall, dass die Stützen in einer Geraden liegen, durch die entsprechenden Fixpunkte geht. Hieraus geht unmittelbar hervor, das die Normalmomente abwechselnd positiv und negativ sind und vom Ende aus fortwährend wachsen, und zwar derart, dass jedes Normalmoment mehr als doppelt so gross ist, als das vorhergehende.

Da nun dieses Polygon abwechselnd ein- und ausspringende Winkel hat, so müssen die Stützendrücke abwechselnd positiv und negativ sein. Aus dem entsprechenden Kraftpolygone geht unmittelbar hervor, dass die Stützendrücke vom Ende aus fortwährend wachsen.

Die Transversalkräfte in den einzelnen Feldern sind die Abstände der Punkte im Kraftpolygone von *M*. Hieraus folgt sofort: dass auch die Transversalkräfte abwechselnd positiv und negativ sind und vom Ende aus fortwährend wachsen.

§. **111. Belastetes Feld.** Es sei jetzt nur das Feld *AB* (Fig. 108) beliebig belastet. Wie in §. 108 lässt sich auch hier nachweisen, dass sich die Verlängerungen der Seiten $U'V'$ und SU in der zur Stütze *A* gehörigen verschränkten Pfeilerverticalen, ebenso die Verlängerungen der Seiten $V''U''$ und SV in der zur Stütze *B* gehörigen verschränkten Pfeilerverticalen schneiden.

Fig. 108.



Wenn die Stützen in einer Geraden liegen, so sind nach der in §. 109 gezeigten Construction der Fixpunkte die Durchschnitte *J* und *K* der Geraden SV und SB mit AB die zu den Fixpunkten J' und K'' gehörigen Fixpunkte. Wir können daher sofort behaupten: Die Seiten SU und SV des zweiten Seilpolygones gehen durch die beiden Fixpunkte *J* und *K*, falls die Stützen in einer Geraden liegen.

Bei bekannter Lage der Fixpunkte und bei gegebener Belastung ist es hiernach leicht möglich, das zweite Seilpolygon zu zeichnen, indem man die Verticalen JJ_1 und KK_1 gleich den entsprechenden Verticalabständen der Kreuzlinien macht; die mittleren Seiten US und VS des Seilpolygones gehen alsdann bezüglich durch J und K_1, K und J_1. Nach §. 105 sind hierdurch auch die Normalmomente bestimmt.

Da $AJ < \frac{1}{3} l$ ist, so liegt U rechts von J, der Winkel AUS ist demnach concav, mithin die in U wirkende Kraft $\frac{1}{2} M' l$ nach oben ge-

richtet, oder M' positiv. Dasselbe gilt für den Punkt V. Die Normalmomente des belasteten Feldes sind daher stets positiv.

Zieht man die Geraden MN und UV, welche die mittlere Verticale in P und Q schneiden, so ist, $b = \frac{1}{8} l$ gesetzt, $PO = \frac{1}{8} (M' + M'')$ und $PQ = \frac{1}{8} (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')$ (siehe §. 105 und 106). Da nun die Punkte U und V unterhalb AB liegen müssen, so ist $PO < PQ$ oder

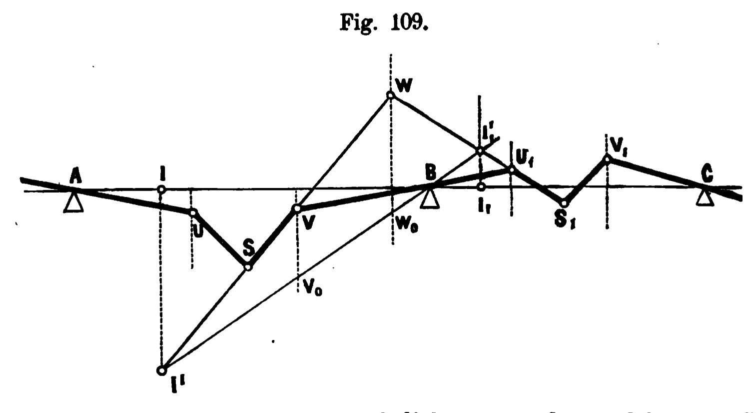
$$M' + M'' < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

Liegen die Stützpunkte nicht in einer Geraden, so geht aus dem soeben und in §. 108 Gesagten hervor, dass die Durchschnittspunkte die Verlängerungen von US und VS mit den Verlängerungen der die Stützen der anstossenden Felder verbindenden Geraden AA' und BB' in den Fixpunktverticalen liegen.

§. 112. Zwei aufeinander folgende belastete Felder. (Fig. 109.)

1. Auch hier lässt sich, wie in §. 108 nachweisen, dass sich die Verlängerungen der, einer Stütze B zunächst liegenden mittleren Seiten SV und S_1U_1 des zweiten Seilpolygones in der, dieser Stütze B entsprechenden verschränkten Pfeilerverticalen schneiden.

Fig. 109.



2. Wir ziehen durch B eine beliebige Gerade, welche die Seiten SV und U_1S_1 in J' und J'_1 und die durch V, W und U_1 gehenden Verticalen in V_0, W_0 und U_0 schneidet. Alsdann verhält sich

$$U_0U_1 : V_0V = U_0B : V_0B = l : l_1$$
$$V_0V : W_0W = J'V_0 : J'W_0.$$

Die Zusammensetzung dieser Proportionen giebt:

$$U_0U_1 : W_1W = J'V_0 . l : JW_0 . l,$$

oder weil $U_0U_1 : W_0W = U_0J'_1 : W_0J'_1$ ist,

$$U_0J'_1 : W_0J'_1 = J'V_0 . l : J'W_0 . l_1.$$

Bewegt sich der Punkt J' in einer Verticalen, so ändert sich das Verhältniss $J' V_0 : J' W_0$ nicht; es wird sich also auch das Verhältniss $U_0 J'_1 : W_0 J'_1$ nicht ändern, es wird sich mithin auch der Punkt J'_1 in einer Verticalen bewegen. Fällt der Punkt J' mit dem Fixpunkte J zusammen, so geht aus der aus §. 109 bekannten Construction sofort hervor, dass alsdann der Punkt J'_1 der Fixpunkt J_1 wird. Hieraus folgt:

Die Durchschnittspunkte J' und J'_1 der durch die Fixpunkte J und J_1 gehenden Verticalen mit den der Stütze B zunächst liegenden mittleren Seiten SV und $U_1 S_1$ des zweiten Seilpolygones liegen stets in einer durch die Stütze B gehenden Geraden, und zwar bei beliebiger Höhenlage der Stützpunkte.

Diese Eigenschaft des zweiten Seilpolygones wurde zuerst von Cullmann angegeben.

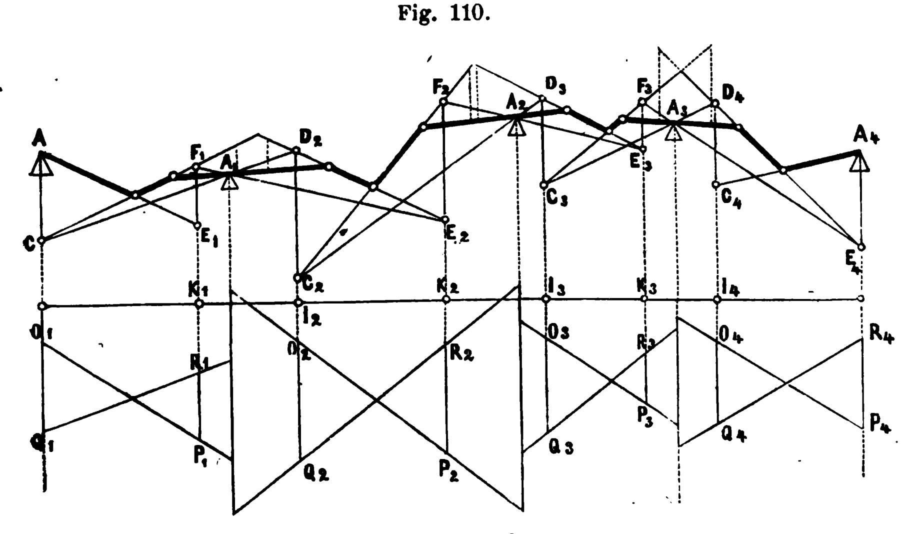
§. **113. Beliebige Belastung der Felder.** Der aus den nachgewiesenen Eigenschaften des zweiten Seilpolygones hervorgehende, in einem beliebigen Belastungsfalle anzuwendende Gang der Construction ist folgender (Fig. 110).

1. Man construire nach §. 109 sämmtliche Fixpunkte A, J_2, J_3, ... K_1, K_2... und ziehe durch sämmtliche Fixpunkte Verticalen.

2. Man construire in sämmtlichen Oeffnungen nach §. 104 die Kreuzlinien.

3. Man mache AC gleich dem entsprechenden Verticalabstande $O_1 Q_1$ der Kreuzlinien und ziehe durch C und A_1 eine Gerade, welche

Fig. 110.



die durch den Fixpunkt J_2 gehende Verticale in D_2 schneidet. Man mache jetzt $D_2 C_2$ gleich dem entsprechenden Verticalabstande $O_2 Q_2$ der

Kreuzlinien und ziehe wiederum durch C_1 und A_2 eine Gerade, welche die durch den Fixpunkt J_3 gehende Verticale in D_3 schneidet u. s. w. Ganz dieselbe Construction wiederhole man vom rechten Ende aus, mache also $A_4 E_4 = R_4 P_4$ u. s. f.

4. Hierdurch hat man für jede der mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones zwei Punkte C und F_1, C_2 und F_2 etc. A und E_1, D_2 und E_2 u. s. f. festgesetzt, so dass sich jetzt diese mittleren Seiten wirklich ziehen lassen.

Die Abstände der Durchschnittspunkte dieser Linien mit den Pfeilerverticalen von den Stützen bestimmen nach §. 105 die Normalmomente. Für diejenigen Oeffnungen, deren Länge $= \lambda$ gewählt wurde, stellen diese Abstände direct die Normalmomente dar; für andere Oeffnungen ist eventuell die in §. 105 gezeigte Construction anzuwenden. Unter Umständen kann auch die folgende einfache Construction vorzuziehen sein (Fig. 111): J, K seien die Durchschnittspunkte der Verticalen durch die Fixpunkte mit der Verbindungsgeraden AB der Stützen. Macht man $JD' = JD\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, $KF' = KF\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, $C'D' = OQ\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, $E'F' = RP\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ und zieht durch C' und F', E' und D' Gerade, so schneiden dieselben offenbar auf den Pfeilerverticalen die Strecken AM' und BN' ab, welche direct die Normalmomente darstellen.

Fig. 111.

Bei der gegebenen Construction pflanzen sich Zeichenfehler von einer Oeffnung auf die andere fort, so dass man möglichst genau construiren muss. Indess bieten sich auch mehrfache Controlen, nämlich: 1. die Durchschnittspunkte der zusammengehörigen mittleren Seiten müssen mit den Durchschnittspunkten der Kreuzlinien in einer Verticalen liegen; 2. die Verlängerungen der mittleren Polygonseiten müssen sich in den verschränkten Pfeilerverticalen schneiden; 3. die entsprechenden Durchschnittspunkte der mittleren Seiten mit den Drittelverticalen müssen in Geraden liegen, welche durch die Stützen gehen.

Sind einzelne Oeffnungen nicht belastet, so ist der Abstand der Kreuzlinien natürlich als Null anzunehmen.

Diese Construction bleibt auch in dem Falle gültig, wenn die Stützen nicht in einer Geraden liegen. Trägt man hierbei die Ordinaten der elastischen Linie, also auch die Höhenunterschiede der Stützpunkte

in $\frac{1}{m}$ der wirklichen Grösse auf, so muss die Einheit für den Momentenmassstab $= \frac{\lambda}{6mEW}$ gewählt werden, wie sich aus §. 104 leicht ergiebt.

In der gezeigten Weise wurde die Construction zuerst von Cullmann angegeben.

XIX. Kapitel.

Specielle Belastungsweisen.

§. **114. Totale gleichmässige Belastung.** 1. Wenn ein Feld mit einer gleichmässig vertheilten Last q pro Längeneinheit total belastet ist, so ist die einfache Momentenfläche ein Parabelabschnitt, dessen verticale Schweraxe die Spannweite halbirt (Fig. 112). Die grösste Höhe desselben ist $\frac{1}{8} q l^2$, mithin der Flächeninhalt $\mathfrak{M} l = \frac{2}{3} \frac{1}{8} q l^2 . l = \frac{1}{12} q l^3$, oder

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12} q l^2.$$

Fig. 112.

Am besten nimmt man für den Momentenmassstab $q\lambda^2$ als Einheit an und hat dann allgemein

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12} q \lambda^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Die verticale Höhe der Kreuzlinien in dem der Poldistanz b gleichen Abstande von der Mitte ist $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$. Sind daher nach §. 106 T die hier gleichen Abstände $OP = QR$ der Kreuzlinien in den Pfeilerverticalen, so verhält sich, wenn man die Poldistanz $b = \frac{1}{6}\lambda$ wählt, $T : \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2} l : \frac{1}{6} \lambda$, mithin $T = 3 \mathfrak{M} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, das ist

$$T = \frac{1}{4} q \lambda^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4.$$

2. Momente. Sind die Normalmomente $A'A''$ und $B'B''$ construirt, so erhält man die Endtangenten der ersten Seilcurve, indem man die Gerade $A''B''$ zieht, durch die Mitte D derselben eine Verticale legt und auf derselben die Länge $DE = 2 \cdot \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{4} q l^2 = \frac{1}{4} q \lambda^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ aufträgt; die Geraden $A''E$ und $B''E$ sind alsdann die Endtangenten. Mit Hilfe derselben lässt sich die Parabel leicht construiren.

3. Transversalkräfte. Zieht man im ersten Kraftpolygone Strahlen parallel zu den Endtangenten und zur Schlusslinie, so sind die Abschnitte auf der Kraftlinie die Transversalkräfte Q', Q'' an den Enden des Feldes. Statt dessen kann man aber auch auf der Axe, von welcher aus die Transversalkräfte als Ordinaten aufgetragen werden sollen, von den Stützen A und B aus nach derselben Seite die der Poldistanz a gleichen Strecken AG und BH auftragen (falls diese Axe und die Schlusslinie horizontal angenommen werden) und durch G und H Parallelen zu den Endtangenten $A''E$ und $B''E$ ziehen; dieselben schneiden auf den Pfeilerverticalen die Transversalkräfte $AA_1 = Q'$, $BB_1 = Q''$ ab. Die Gerade A_1B_1 entspricht alsdann den Transversalkräften an beliebigen Querschnitten.

Ist die die Momenteneinheit $q\lambda^2$ darstellende Linie $= m$, die die Krafteinheit $q\lambda$ darstellende Linie $= n$, so muss die erste Poldistanz $a = \frac{q\lambda}{q\lambda^2}\lambda = \frac{n}{m}\lambda$ gewählt werden.

Hiernach ist es nun leicht, nach der in §. 113 gezeigten allgemeinen Construction die Transversalkräfte und Momente in Folge des Eigengewichtes zu bestimmen. Ein Beispiel ist auf Tafel IV durchgeführt.

§. 115. Partielle gleichmässige Belastung. 1. Wenn nur ein Theil des Trägers von einem Ende B (Fig. 113) aus belastet ist, so besteht die einfache Momentenfläche aus einem Dreiecke ABC und aus einem Parabelabschnitte CEB.

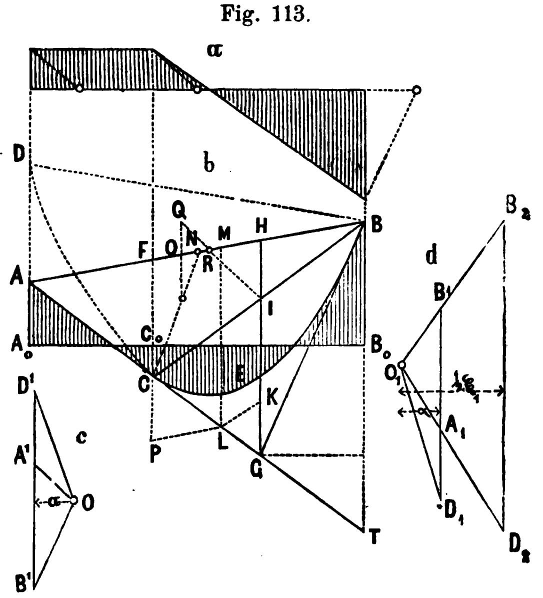
Entspricht im ersten Kraftpolygone $B'D'$ der totalen Belastung des Feldes, so theilt der Strahl OA', welcher der Endtangente AG der Seilcurve parallel ist, $B'D'$ in demselben Verhältnisse, als die Spannweite durch das Ende der Belastung getheilt wird, oder es verhält sich, wenn wir die Länge B_0C_0 der Belastung mit ξ_1 bezeichnen, $B'A' : B'D' = \xi_1 : l$. Der Durchschnittspunkt G beider Endtangenten liegt ausserdem in einer Verticalen GH, welche BF halbirt.

Da $\triangle GBT \sim \triangle OA'B'$ ist, so verhält sich $BT : B'A' = \frac{1}{2}\xi_1 : a$, oder, weil bei der Last p pro Längeneinheit $B'D' = pl$, $B'A' = p\xi_1 = pl\frac{\xi_1}{l}$ ist, $BT : pl\frac{\xi_1}{l} = \frac{1}{2}\xi_1 : a$, oder

$$BT = pl\frac{\xi_1}{l}\frac{\xi_1}{2a}.$$

Hiernach ist es leicht, die Länge von BT zu construiren, wie in Fig. 113d gezeigt ist, worin $B_1D_1 = pl$, $A_1B_1 = {}_{l}\, B_1D_1$, $D_2B_2 = BT$ ist. Ist in dieser Weise die Länge von BT construirt, so kann man, wenn die Punkte A und B gegeben sind, leicht die Endtangenten und hiernach die erste Seilcurve selbst construiren.

Fig. 113.



2. Macht man $GK = \frac{1}{3} GJ$, so ist $\triangle CKB$ gleich der Parabelfläche CEB. Zieht man daher durch K eine Parallele zu CB, welche CG in L schneidet, und durch L bis zum Durchschnitte mit AB die Verticale LM, so ist $\triangle ALB$ gleich der ganzen einfachen Momentenfläche, die letztere also der Höhe LM proportional, oder bestimmter $\mathfrak{M} l = \frac{1}{2} l . LM$ od. $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} LM$. Es lässt sich leicht nachweisen, dass $FM = \frac{1}{3} FB$ ist, so dass sich die Höhe LM leicht direct zeichnen lässt.

3. Der Punkt N sei die Mitte von AB; macht man $NO = \frac{1}{3} NF$, so liegt der Schwerpunkt des Dreieckes ACB in der durch O gehenden Verticalen, während der Schwerpunkt des Parabelabschnittes CEB in der Verticalen HG liegt. Zieht man durch L eine Parallele zu AB, welche die durch C gehende Verticale in P schneidet, so verhalten sich beide Flächen wie $FC : CP$. Macht man in der durch O gehenden Verticalen $OQ = \frac{1}{2} CP$, so verhält sich, da $JH = \frac{1}{2} CF$ ist, $JH : OQ = FC : CP$; der Durchschnittspunkt R der Geraden QJ mit AB muss daher in der verticalen Schweraxe der einfachen Momentenfläche liegen.

Hiernach würde nun die Construction der Kreuzlinien leicht ausführbar sein.

4. Für die Anwendung erscheint es am bequemsten, den Abstand T', T'' der Kreuzlinien in den Pfeilerverticalen für die Belastung verschiedener Theile der ganzen Oeffnung ein- für allemal zu construiren oder zu berechnen. Die bezüglichen Formeln lassen sich leicht direct oder aus der gezeigten Construction ableiten. Die Formeln für $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$

sind in §. 37 aufgestellt. Die Werthe für T' und T'' ergeben sich hieraus nach §. 106 einfach durch Multiplication mit $\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$.

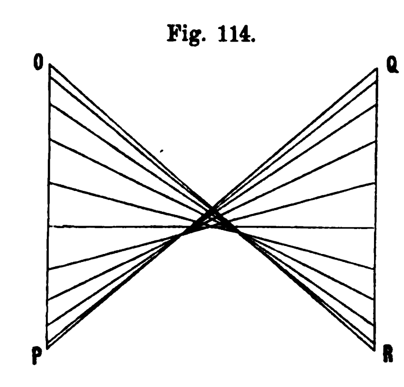
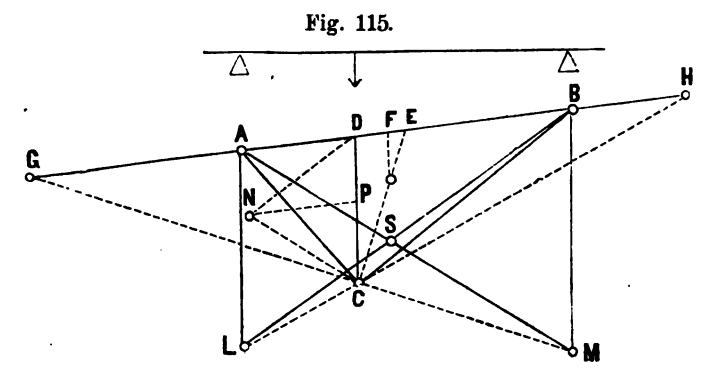


Fig. 114.

Die Werthe von $\mathfrak{N}'$ oder $\mathfrak{N}''$ für dasselbe $\frac{\xi}{l}$, aber für linke und rechte Belastung, müssen sich zu dem $\mathfrak{N}'$ oder $\mathfrak{N}''$ für totale Belastung, d. i. zu $0{,}25\,p\,l^2$ ergänzen. Da offenbar $\mathfrak{N}'$ für rechte Belastung für $\frac{\xi}{l}$ gleich $\mathfrak{N}''$ für linke Belastung für $1 - \frac{\xi}{l}$ ist, so müssen sich auch $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ für dieselbe Belastungsweise, aber für $\frac{\xi}{l}$ und $1 - \frac{\xi}{l}$, zu $0{,}25\,pl^2$ ergänzen. Hiernach ergeben sich die Theile, welche die Kreuzlinien auf beiden Pfeilerverticalen abschneiden, gleich gross (Fig. 114), falls man für alle Lagen der Last die eine Kreuzlinie (in Fig. 114 *OR* für rechte Belastung, *PQ* für linke Belastung) beibehält.

§. **116. Belastung durch eine Einzellast.** Die einfache Momentenfläche wird hier ein Dreieck *ACB* (Fig. 115) mit dem Flächeninhalte $\frac{1}{2}\,lh$, wenn h die grösste verticale Höhe *CD* bedeutet. Demnach ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\,h$. Theilt man den Abstand *DE* des Angriffspunktes *D* der

Fig. 115.



Einzellast von der Mitte *E* der Geraden *AB* in drei gleiche Theile, so geht die verticale Schweraxe der einfachen Momentenfläche durch den *E* zunächst liegenden Theilpunkt *F*.

Da die Höhe *CD* dem $\mathfrak{M}$ proportional ist, so kann *CD* als zweites Kraftpolygon gelten; da $h = 2\mathfrak{M}$ ist, so würde der Abstand des Poles *N* von *CD* oder die zweite Poldistanz $= 2 \cdot \frac{1}{6}\,l = \frac{1}{3}\,l$ zu wählen sein (wenn man hier $\lambda = l$ wählt, siehe §. 105). Zieht man *NP* parallel *AB*, so würde $NP = \frac{1}{3}\,AB$.

Parallel zu NC und ND können die Kreuzlinien gezogen werden. Eine einfache Construction lässt sich für dieselben angeben, wenn man sie durch die Punkte A und B legt. AM und BL seien die Kreuzlinien; alsdann ist $\triangle SBM \backsim \triangle NCD$, mithin $BM:CD = BF:NP$. Nun aber ist $BF = BE + \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} AB - AD) =$ $= \frac{1}{2}(2AB - AD)$ und $NP = \frac{1}{2} AB$, mithin:

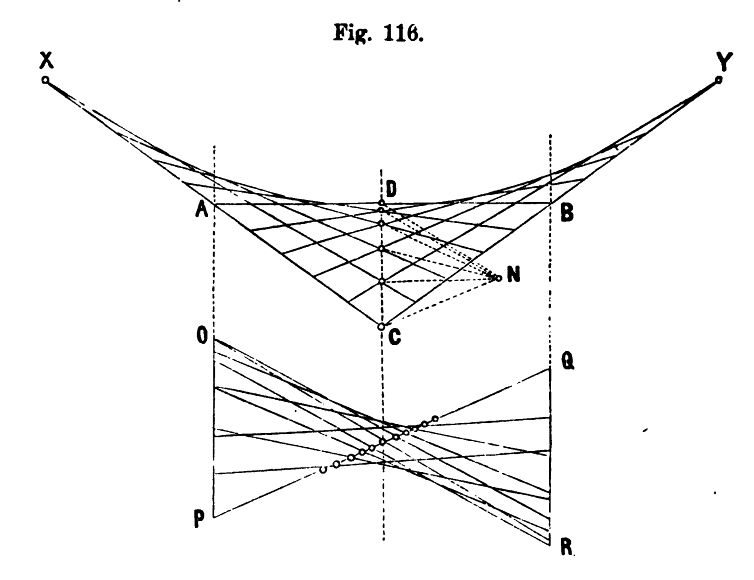
$$BM : CD = (2AB - AD) : AB.$$

Macht man $DG = AB$, so wird $BG = 2AB - AD$. Der Punkt M ergiebt sich sonach, indem man durch G und C eine Gerade legt. Macht man ebenso $DH = AB$ und legt durch H und C eine Gerade, so ergiebt sich der Punkt L.

Die Verlängerungen von MC und LC schneiden also die Verlängerungen von AB in den Punkten G und H, welche um AB von D abstehen.

Wenn man die Einzellast in mehreren bestimmten Lagen zu untersuchen hat, so zeichnet man am besten das aus zwei Geraden CX und CY bestehende erste Seilpolygon und trägt in dasselbe die Schlusslinien

Fig. 116.



(für die einfache Momentenfläche) in den verschiedenen Lagen ein (Fig. 116). Die von diesen Schlusslinien auf der durch C gehenden Verticalen CD abgeschnittenen Strecken sind alsdann die h oder $2\mathfrak{M}$. Zieht man von diesen Schnitten Strahlen nach dem Pole N, welcher von CD den Abstand $\frac{1}{2} l$ hat, so können die Kreuzlinien parallel diesen Strahlen gezogen werden, wobei man am besten für jedes Paar die eine zu NC parallele

Linie PQ beibehält. Wenn die Angriffspunkte der Last die Spannweite in gleiche Theile theilen, so theilen auch die Durchschnittspunkte der Kreuzlinien das mittlere Dritttheil von PQ in ebensoviele gleiche Theile.

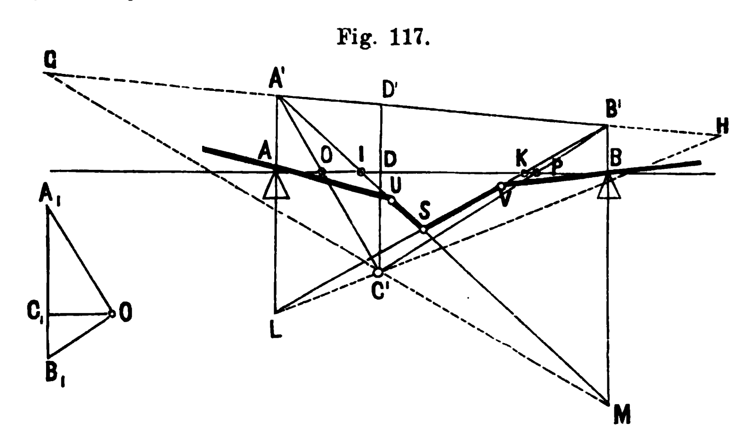
Der Schwerpunkt der einfachen Momentenfläche kann aus dem mittleren Dritttheil der Spannweite nicht heraustreten. Da sich nun jede andere Belastung als aus mehreren Einzellasten bestehend ansehen lässt, so muss überhaupt bei jeder Belastungsweise der Schwerpunkt der einfachen Momentenfläche innerhalb der Drittel-Verticalen liegen.

XX. Kapitel.

Die gefährlichste Belastungsweise in Betreff einer gleichmässigen Belastung.

§. 117. Gefährlichste Belastungsweise in Betreff der Transversalkräfte. Wir denken uns zunächst nur die fragliche Oeffnung durch eine Einzellast mit der einfachen Momentenfläche $A'C'B'$ (Fig. 117) belastet. Im Kräftepolygone sei OA_1, OB_1, OC_1 bezüglich parallel den Linien $C'A'$, $C'B'$, $A'B'$. Alsdann ist C_1A_1 und C_1B_1 die Transversalkraft Q' und Q'' bei A und B.

Fig. 117.



Da nach §. 111 die Normalmomente AA' und BB' stets positiv sind und die mittleren Seiten $A'S$ und $B'S$ des zweiten Seilpolygones durch die Fixpunkte J und K gehen, so folgt aus der im vorigen Paragraphe gezeigten Construction, dass die Durchschnittspunkte O und P der Seiten des ersten Seilpolygones mit der Schlusslinie innerhalb der Strecken AJ und BK liegen, oder die Wendepunkte O und P liegen stets ausserhalb der Fixpunkte. Hieraus aber folgt sofort,

dass die Punkte A', B' und der Punkt C' auf verschiedenen Seiten der Schlusslinie AB liegen. In Folge dessen muss der Punkt C_1 unbedingt innerhalb der Punkte A_1 und B_1 liegen. Demnach ist Q' stets positiv, Q'' stets negativ.

Im Uebrigen lässt sich nun genau wie §. 47 schliessen. Wir wiederholen nur die dort erhaltene Regel, welche lautet:

Die Transversalkraft wird in irgend einem Querschnitte zu einem positiven oder negativen Maximum, wenn sich die Last im fraglichen Felde vom Querschnitte bis zum rechten oder linken Ende erstreckt, und wenn die übrigen Felder abwechselnd belastet sind, und zwar derart, dass an den belasteten Theil des fraglichen Feldes ein nicht belastetes Feld, an den unbelasteten Theil des fraglichen Feldes ein belastetes Feld stösst.

§. **118. Gefährlichste Belastungsweise in Betreff der Momente.** 1. Belastung des fraglichen Feldes. Zunächst liege im beliebigen Punkte D (Fig. 117) eine Einzellast. $AUSVB$ sei das zweite $A'C'B'$ das erste Seilpolygon, wobei AA', BB' den Normalmomenten entsprechen. Wir haben im vorigen Paragraphe gezeigt, dass die Wendepunkte O und P (für welche das Moment M Null wird) ausserhalb der Fixpunkte liegen. Wir können daher behaupten: Innerhalb der Fixpunkte ist das Moment stets negativ, wo auch die Einzellast liegen möge.

Hieraus folgt ferner: Für jeden zwischen den beiden Fixpunkten liegenden Querschnitt wird das Moment zum negativen Maximum, wenn das ganze Feld belastet ist.

Aus der Figur geht unmittelbar hervor, dass die Wendepunkte O und P nach rechts oder links rücken, wenn die Einzellast nach rechts oder links rückt. Demnach muss, wenn für die Lage der Einzellast in D das Moment im Punkte O = Null ist, das Moment in demselben Punkte O positiv oder negativ werden, je nachdem die Last rechts oder links von D liegt. Hieraus aber folgt in Betreff der gefährlichsten Belastungsweise sofort folgender Satz:

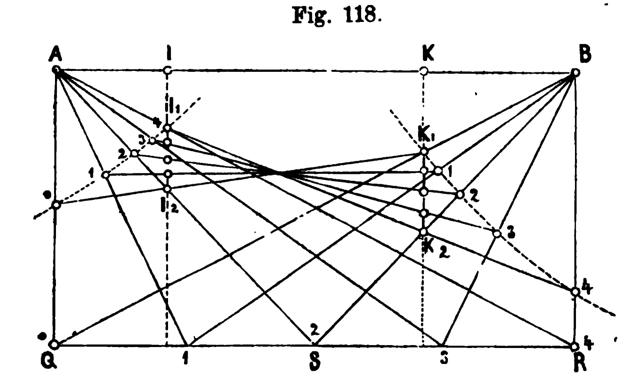
Für einen beliebigen Querschnitt O ausserhalb der beiden Fixpunkte wird das Moment zum positiven oder negativen Maximum, wenn die Last von demjenigen Punkte D, in welchem eine Einzellast liegen muss, damit O zum Wendepunkte werde, bezüglich bis zu der von O am weitesten entfernten Stütze B oder der an O zunächst liegenden Stütze A reicht. Für das negative Maximum wird sonach der

fragliche Punkt O von der Last überdeckt, für das positive Maximum dagegen nicht.

Wenn der Punkt O gegeben ist, so ist es wohl möglich, den Punkt D, bis zu welchem die Last reichen muss, durch Construction zu bestimmen. Allein es ist wesentlich einfacher, den Punkt D anzunehmen und hiernach den Punkt O zu construiren.

Wählt man für verschiedene D die beliebige Länge $C'D'$ (Fig. 117) gleich gross, so dass der Punkt C' in eine Parallele QR zu $A'B'$ fällt (Fig. 118), und ausserdem die Punkte D in gleichen Abständen, so liegen auch die Punkte L und M (Fig. 117) in gleichen Abständen; ebenso liegen dann auch die Punkte J und K, in welchen die Verticalen durch die Fixpunkte von den Geraden $A'M$ und BL' geschnitten werden, in gleichen Abständen,

Fig. 118.



woraus sich folgende einfache Construction ergiebt (Fig. 118): Zwischen den Pfeilerverticalen ziehe man in einem beliebigen Abstande zwei Parallelen AB und QR und theile QR in eine Anzahl gleicher Theile. Eine Theilung in 4 oder 5 Theile wird stets genügen; oft wohl auch eine Theilung in nur 2 Theile. Von A ziehe man nach R und der Mitte S von QR Geraden, welche die Verticale durch den Fixpunkt J in J_1 und J_2 schneiden; ebenso ziehe man von B nach Q und S Geraden, welche die Verticale durch den Fixpunkt K in K_1 und K_2 schneiden. Die Strecken $J_1 J_2$ und $K_1 K_2$ theile man in ebensoviel gleiche Theile wie QR und verbinde die Theilpunkte in verkehrter Reihenfolge durch Gerade. Die Durchschnittspunkte derselben mit den von A und B nach den Theilpunkten von QR gezogenen Geraden entsprechen den Punkten O, für welche das Moment zum Maximum wird, wenn die Last durch die entsprechenden Theilpunkte von QR begrenzt ist.

Diese Construction wurde zuerst von Mohr angegeben.

§. **119. Bestimmung der Maximal-Transversalkräfte.** Nach der in §. 113 gezeigten allgemeinen Construction ist es mit Rücksicht auf die in §. 114 und 115 behandelten Fälle der gleichmässigen totalen und partiellen Belastung eines Feldes sehr leicht, die Transversalkräfte

zu bestimmen, welche der jetzt bekannten gefährlichsten Belastungsweise entsprechen. Auf Tafel V ist ein Beispiel durchgeführt, wozu nur wenig zu bemerken ist.

1. Im III. und IV. Felde ist die Construction für totale Belastung in derselben Weise wie auf Tafel IV durchgeführt. Die erhaltenen Transversalkräfte sind alsdann in das I. und II. Feld übertragen.

2. Im II. Felde ist die Construction für die gefährlichste Belastung in Betreff der positiven Transversalkräfte des II. Feldes durchgeführt. Für die Belastung des I. und IV. Feldes sind die Punkte D und F construirt, welche den mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones für alle Belastungsweisen des II. Feldes gemeinschaftlich sind. Nachdem nun für die Belastung des rechten Theiles des II. Feldes vom fraglichen Querschnitte aus nach der Tabelle in §. 37 die Kreuzlinien und hiernach die mittleren Seiten der zweiten Seilpolygone construirt wurden, wurde die Endtangente AT (Fig. 113) der ersten Seilcurve dadurch festgelegt, dass die Längen BT (Fig. 113) auf der rechten Pfeilerverticalen aufgetragen wurden. Für die Bestimmung der Länge von BT ist die in §. 115, 1) gezeigte Construction angewendet (Taf. V, Fig. 6). Es ist auf den mittleren Pfeilerverticalen aa, bb, cc etc. gleich den Längen aa, bb, cc etc. in Fig. 6 gemacht worden. Mit Hilfe der so festgelegten linken Endtangenten konnten nun in Fig. 2 die Transversalkräfte durch Parallelen zu denselben, welche von Punkten ausgehen, die von den betreffenden Ordinaten den Abstand a haben, construirt werden.

3. Im ersten Felde ist ebenfalls die Construction für die gefährlichste Belastung in Betreff der positiven Transversalkräfte des I. Feldes durchgeführt. Die Normalmomente indess wurden nach §. 105, 3) im nicht belasteten II. Felde construirt. Für die alleinige Belastung des III. Feldes wurde der Punkt F_1 construirt, durch welchen die mittlere Seite des Seilpolygones gehen muss. Ein zweiter Punkt dieser Seite auf der Verticalen durch den linken Fixpunkt hat für die verschiedenen Belastungen des I. Feldes eine variable Lage, ist aber mit Hilfe der Kreuzlinien leicht zu construiren. Im Uebrigen ist die Construction wie im II. Felde, wobei Fig. 5 an die Stelle von Fig. 6 tritt.

Die Construction der Normalmomente würde auch nach §. 105, 1) oder nach §. 114 geschehen können.

4. Die negativen Maxima der Transversalkräfte ergeben sich nun leicht durch Subtraction der positiven Maxima von den Transversalkräften für totale Belastung.

§. 120. **Bestimmung der Maximalmomente.** Ebenso ist es nun auch nach der in §. 113 gezeigten allgemeinen Construction mit Berücksichtigung der in §. 114 und 115 behandelten Fälle leicht, die

Momente zu bestimmen, welche der bekannten gefährlichsten Belastungsweise entsprechen. Auf Tafel VI ist ein Beispiel durchgeführt.

1. Im III. und IV. Felde sind die Momente construirt, welche einer totalen Belastung und der gefährlichsten Belastung für die negativen Momente innerhalb der Fixpunkte entsprechen. Für beide Fälle ist das betreffende Feld total belastet.

2. Im I., II. und III. Felde ist die Construction der Momente für die gefährlichste Belastung in Betreff der positiven Momente auf der rechten Seite des betreffenden Feldes durchgeführt. Die Construction ist genau dieselbe wie für die Transversalkräfte. Es kommt nur noch die Construction der gefährlichsten Belastungsweise hinzu, welche in Fig. 7 nach §. 118 ausgeführt ist. Die Endtangenten der ersten Seilcurve, welche ebenfalls wie im vorigen Paragraphe construirt sind (sie sind punktirt angegeben), entsprechen der Momentenlinie innerhalb der nicht belasteten Strecke des betreffenden Feldes (wie Fig. 113 zeigt). Man kann demnach die positiven Maximalmomente direct aus Fig. 3 entnehmen.

Im I. Felde ist zur Construction der Normalmomente das in §. 113 (Fig. 111) gezeigte Verfahren angewendet. Es ist nämlich der Punkt F' so bestimmt, dass $KF' = KF_1\left(\frac{l}{l_1}\right)^2$ wurde. Ausserdem sind auf der linken Pfeilerverticalen nicht die Höhen der Kreuzlinien im I. Felde, sondern die Höhen der Kreuzlinien im II. Felde in den Pfeilerverticalen, multiplicirt mit $\left(\frac{l_1}{l}\right)^2$ aufgetragen. Die Multiplication ist graphisch mit Hilfe des Proportionalwinkels durchgeführt.

3. Die negativen Maxima der Momente ergeben sich nun leicht durch Subtraction der positiven Maxima von den Momenten für totale Belastung. Eine directe Construction der negativen Maxima ist etwas schwieriger, als die der positiven Maxima, weil die erste Seilcurve an dem betreffenden Querschnitte nicht geradlinig, sondern parabolisch gekrümmt ist.

§. **121. Bemerkungen.** Für die praktische Anwendung ergeben sich gegen die auf Taf. IV, V, VI ausgeführten Constructionen manche Vereinfachungen, die wir nur der grösseren Deutlichkeit wegen nicht angewendet haben.

1. Die von uns der Deutlichkeit wegen auf 3 Blätter vertheilten Constructionen lassen sich auf ein und demselben Blatte ausführen, indem man Fig. 4 auf Taf. IV, Fig. 3 auf Taf. V und Fig. 3 auf Taf. VI in eine Figur vereinigen kann. Ja die zur Construction der grössten Transversalkräfte nöthigen Linien können ohne Weiteres zur Construction der grössten Momente verwendet werden. Es würde sonach nicht einmal zweckmässig sein, die Construction in verschiedene Figuren zu trennen.

2. Die Kreuzlinien in den Endfeldern kann man ganz weglassen, da hier die Kenntniss der Höhe der Kreuzlinien an den Endpfeilern genügt, die man im zweiten Seilpolygon direct auftragen kann.

3. Man kann alsdann das zweite Seilpolygon direct benützen, um die Linien für die Momente in Betreff des Eigengewichtes und der zufälligen Last einzuzeichnen, so dass das Uebertragen der Ordinaten aus einer Figur in die andere wegfällt.

4. Selbstverständlich wird man die zur Construction nöthigen Geraden nicht vollständig durchziehen, sondern nur die nöthigen Anschnitte machen.

5. Auf unseren Tafeln ist die Construction in Betreff des Eigengewichtes und der zufälligen Last getrennt durchgeführt, so dass nachträglich eine Addition nöthig wird. Allein es ist recht wohl möglich, sich bei der Construction beide Theile der Belastung vereinigt zu denken, wodurch eine weitere Vereinfachung erzielt wird.

IV. Graphische Behandlung unter Annahme eines variabelen Querschnittes.

XXI. Kapitel.

Allgemeines.

§. **122. Das zweite Seilpolygon.** Die Differenzialgleichung der elastischen Linie ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EW} = \frac{1}{E\mathfrak{W}} \cdot \frac{\mathfrak{W}}{W} M,$$

wobei wir das mittlere Trägheitsmoment $\mathfrak{W}$ in demselben Sinne deuten, wie in §. 91. Hiernach ist die elastische Linie eine Seilcurve, für welche die Last pro Längeneinheit $= \frac{\mathfrak{W}}{W} M$ und die Horizontalspannung $= E\mathfrak{W}$ ist.

Stellt nun $A''C''B''$ (Fig. 119) die Momentencurve dar, so ziehen wir die Geraden $A'B'$ und $A''B''$ und denken uns das Moment M an einer beliebigen Stelle gleich der Summe der Höhen X' und X'' der Dreiecke $A'B''A''$ und $A''B'B''$, weniger der Höhe X der einfachen Momentenfläche $A''C''B''$, also

$$M = X' + X'' - X,$$

$$\frac{\mathfrak{W}}{W} M = \frac{\mathfrak{W}}{W} X' + \frac{\mathfrak{W}}{W} X'' - \frac{\mathfrak{W}}{W} X.$$

Wir stellen nun die Grössen $\frac{\mathfrak{W}}{W}X'$, $\frac{\mathfrak{W}}{W}X''$, $\frac{\mathfrak{W}}{W}X$ als Ordinaten dar, und nennen die so entstehenden Flächen entsprechend dem §. 93 die verzerrten Normalflächen und verzerrte einfache Momentenfläche.

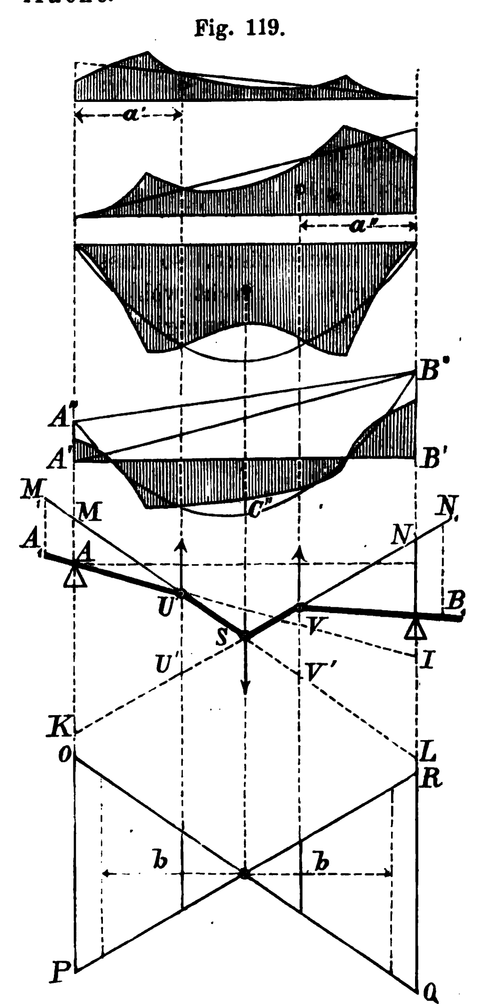


Fig. 119.

Die Fläche mit den Ordinaten $\frac{\mathfrak{W}}{W}M$ oder die verzerrte Momentenfläche ist alsdann gleich der Summe der beiden verzerrten Normalflächen, weniger der verzerrten einfachen Momentenfläche.

Wir denken uns nun die Inhalte dieser drei Flächen in ihren Schwerpunkten als Verticalkräfte wirkend und nennen das diesen Kräften entsprechende Seilpolygon das zweite Seilpolygon.

Die Schwerpunkte aller drei Flächen lassen sich, auch wenn man die Normalmomente noch nicht kennt, construiren. Nach den in §. 91 gemachten Bezeichnungen ist der Abstand a', a'' der Schwerpunkte der verzerrten Normalflächen von den nächsten Pfeilerverticalen

F G H E O b

$$a' = \frac{3B_1 - 2C_1}{3B_1}l = \frac{\gamma}{3B_1}l,$$

$$a'' = \frac{3B - 2C}{3B}l = \frac{\gamma}{3B}l.$$

Wir verwandeln nun die beiden verzerrten Normalflächen in Dreiecke mit der Länge l und bezeichnen die Höhen an den Enden mit M_1' und M_1''. Obwohl man nun die Normalmomente M' und M'' noch nicht kennt, so wird doch das Verhältniss von M_1' und M_1'' zu M' und M'' dasselbe bleiben, wie gross auch M' und M'' sein möge. Wir erhalten also durch die Flächenverwandlung dieses Verhältniss, so dass wir, wenn B und B_1 constante Zahlen bedeuten, $M_1' = B_1 M'$ und $M_1'' = B M''$ setzen können. Es ist leicht nachzuweisen, dass B und B_1 hier ganz dieselbe Bedeutung haben, wie in §. 91.

Wir verwandeln ferner auch die verzerrte einfache Momentenfläche in ein Rechteck mit der Länge l und bezeichnen die Höhe desselben mit $\mathfrak{M}$.

Machen wir nun im zweiten Kräftepolygone die Poldistanz $b = \frac{E\mathfrak{B}}{\gamma n \lambda}$ und die Strahlen parallel den Seiten des zweiten Seilpolygones, so ist $GF = \frac{1}{2\gamma} M_1' \frac{l}{\lambda}$, $EH = \frac{1}{2\gamma} M_1'' \frac{l}{\lambda}$ und $EF = \frac{1}{\gamma} \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$, wobei n und λ dieselbe Bedeutung haben, wie in §. 103 und 104.

§. **123. Bestimmung der Normalmomente.** Verlängert man die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones bis zum Durchschnitte M und N mit den Pfeilerverticalen, so ist, wenn wir die Längen AM und BN mit y' und y'' bezeichnen, $\frac{1}{2\gamma} M_1' \frac{l}{\lambda} : b = y' : a'$, $\frac{1}{2\gamma} M_1'' \frac{l}{\lambda} : b = y'' : a''$, also

$$M_1' = \frac{2\gamma b \lambda}{l a'} y', \quad M_1'' = \frac{2\gamma b \lambda}{l a''} y''.$$

Setzen wir nun nach §. 122 $a' = \frac{\gamma}{3B_1} l$, $a'' = \frac{\gamma}{3B} l$ und $M' = \frac{M_1'}{B_1}$, $M'' = \frac{M_1''}{B}$, so erhalten wir

$$M' = \frac{6 b \lambda}{l^2} y', \quad M'' = \frac{6 b \lambda}{l^2} y''.$$

Am besten ist es auch hier, die Poldistanz $b = \frac{1}{6} \lambda$ zu wählen. Alsdann wird

$$M' = y' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2, \quad M'' = y'' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2.$$

Zieht man daher in den Abständen $a' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \frac{\gamma}{3B_1} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ und $a'' \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \frac{\gamma}{3B} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$ von U und V Verticalen, so sind die Strecken $A_1 M_1$ und $B_1 N_1$, welche auf diesen Verticalen von den Verlängerungen der Seiten des zweiten Seilpolygones abgeschnitten werden, gleich M' und M''.

§. **124. Construction des zweiten Seilpolygones bei gegebenen Pfeilertangenten.** Ist die Lage der Pfeilertangenten gegeben, so trägt man auf zwei Verticalen (Fig. 119), welche vom Schwerpunkte der verzerrten einfachen Momentenfläche den Abstand b haben, die Grösse $\mathfrak{M} \frac{l}{\lambda}$ auf und verbindet die so erhaltenen Punkte durch zwei sich schneidende Geraden, die sogenannten Kreuzlinien. Macht man jetzt auf den durch die Schwerpunkte der verzerrten Normalflächen gehenden Verticalen, die wir auch hier der Einfachheit Drittelverticalen nennen wollen, UU' und VV' gleich dem Verticalabstande der Kreuzlinien in diesen Verticalen, so bilden UV' und VU' die mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones.

Bezeichnen wir den Abstand OP und QR der Kreuzlinien in den Pfeilerverticalen mit T' und T'', den Abstand des Schwerpunktes der verzerrten einfachen Momentenfläche von diesen Verticalen mit ξ' und ξ'', so ist $T' : \xi' = \frac{1}{\gamma} \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} : b$ und $T'' : \xi'' = \frac{1}{\gamma} \mathfrak{M} \frac{l}{\lambda} : b$, mithin

$$T' = \frac{\mathfrak{M} \xi' l}{\gamma b \lambda}, \quad T'' = \frac{\mathfrak{M} \xi'' l}{\gamma b \lambda},$$

und, wenn man $b = \frac{1}{6} \lambda$ wählt,

$$T' = \frac{6 \mathfrak{M} \xi' l}{\gamma \lambda^2}, \quad T'' = \frac{6 \mathfrak{M} \xi'' l}{\gamma \lambda^2}.$$

Bezeichnen wir nun in Uebereinstimmung mit §. 93 das $\frac{6}{l^2}$ fache der statischen Momente der verzerrten einfachen Momentenfläche in Beziehung auf die rechte und linke Pfeilerverticale mit $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$, so wird

$$T' = \frac{1}{\gamma} \mathfrak{N}'' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \quad T'' = \frac{1}{\gamma} \mathfrak{N}' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Man kann hiernach auch die Grössen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ zur Construction der Kreuzlinien verwenden. Die Bestimmung von $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ aber auf dem Wege der Rechnung und Construction wurde bereits in §. 93 gezeigt.

§. 125. **Zusammenhang mit der analytischen Theorie.** Der Zusammenhang der gezeigten Construction mit der früher entwickelten analytischen Theorie lässt sich leicht erkennen. Verlängert man AU und MU (Fig. 104) bis zum Durchschnitte I und T mit der rechten Pfeilerverticalen, so ist $BI = NT - BN - IT$. Nun aber ist nach dem Gesagten $NT = \frac{1}{\gamma} N' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, $BN = M'' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, $AM = M' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$, also $IT = M' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{UJ}{UA}$; da aber $a' = \frac{\gamma}{3B_1} l$, $l - a' = \frac{3B_1 - \gamma}{3B_1} = \frac{2\alpha}{3B_1}$, also $\frac{UJ}{UA} = \frac{l - a'}{a'} = \frac{2\alpha}{\gamma}$ ist, so wird $IT = 2\alpha M' \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$. Endlich ist $BI = n(s - l\tau')$, mithin

$$\gamma n (s - l\tau') = (\mathfrak{N}' - 2\alpha M' - \gamma M'') \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Nun aber ist $b = \frac{E\mathfrak{W}}{\gamma n \lambda} = \frac{1}{6} \lambda$ gewählt worden, also ist $n = \frac{6EW}{\gamma \lambda^2}$. Dies eingesetzt, giebt

$$6EW(s - l\tau') = (\mathfrak{N}' - 2\alpha M' - \gamma M'') l^2,$$

$$\tau' = \frac{l}{6EW} (2\alpha M' + \gamma M'' - \mathfrak{N}') + \frac{s}{l},$$

welche Gleichung mit der ersten der Gleichungen 196 übereinstimmt. In gleicher Weise lässt sich die zweite dieser Gleichungen nachweisen.

Aus diesen Gleichungen folgt dann sofort durch Gleichsetzung der zwei Ausdrücke für den Tangentenwinkel an einer Stütze die Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Normalmomenten.

Umgekehrt würde man aus den auf analytischem Wege gefundenen Ausdrücken für τ' und τ'' leicht die Construction ableiten können.

In Fig. 104 fehlt die Verlängerung von AU, welche BL in I schneidet.

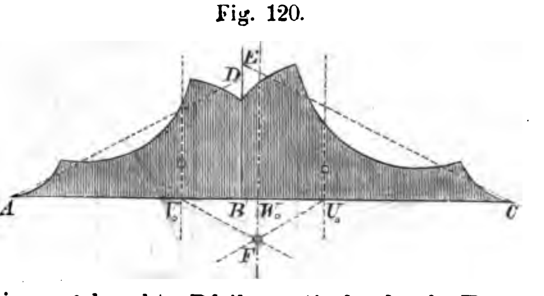
§. 126. Anwendung auf den continuirlichen Träger. Die einer Stütze B (Fig. 106) zunächst liegenden mittleren Seiten des zweiten Seilpolygones der beiden an B angrenzenden Felder mögen sich in einem Punkte W schneiden. Da nun in der durch W gehenden Verticalen die Resultante der beiden in V und U_1 wirkenden Kräfte nach §. 123 $\frac{1}{2} BM_1 l$ und $\frac{1}{2} B_1 M_1 l_1$ sind, so verhält sich der Abstand der durch W gehenden Verticalen von V_0 und W_0 wie $\frac{1}{2} BM_1 l_1$ zu $\frac{1}{2} B_1 M_1 l$, d. i.

$$V_0 W_0 : U_0 W_0 = B_1 l_1 : Bl.$$

Hierbei bezieht sich l und B auf das linke, l_1 und B_1 auf das rechte Feld und zwar B auf die rechte Seite des linken Feldes, B_1 auf die linke Seite des rechten Feldes. Hiernach hat die durch W gehende Verticale eine constante Lage, wie auch sonst die Seilpolygone beschaffen sein mögen. Wir nennen diese Verticale auch hier die verschränkte Pfeilerverticale.

Die Lage der verschränkten Pfeilerverticalen lässt sich nach der aufgestellten Proportion leicht construiren. Sind in Fig. 120 die Dreiecke ABD und CBE gleich den entsprechenden verzerrten Normalflächen, also $BD = B.M$, $BE = B_1.M_1$, so hat man nur nöthig, durch U_0 und V_0 bezüglich zu AD und CE Parallelen zu ziehen, welche sich in F schneiden; alsdann geht, wie sich ohne Weiteres nachweisen lässt, die verschränkte Pfeilerverticale durch F.

Fig. 120.



Mit Ausnahme dieser Abänderung bleibt alles in §. 108 bis 114 Gesagte auch hier vollkommen gültig. Der Unterschied der Behandlung der continuirlichen Träger mit variabelem Querschnitte von denen mit constantem Querschnitte besteht daher nur in Folgendem: 1. Die Drittelverticalen gehen nicht mehr genau durch die Dreitheilpunkte der Felder, sondern durch die Schwerpunkte der verzerrten Normalflächen. 2. Die verschränkten Pfeilerverticalen sind nach der soeben gezeigten Regel zu bestimmen. Hierdurch erhalten natürlich auch die Fixpunkte

eine abweichende Lage. 3. Die Grössen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ sind hier nicht das $\frac{6}{l^2}$ fache der statischen Momente der Momentenfläche, sondern das $\frac{6}{l^2}$ fache der statischen Momente der verzerrten Momentenfläche in Beziehung auf die Pfeilerverticalen.

XXII. Kapitel.

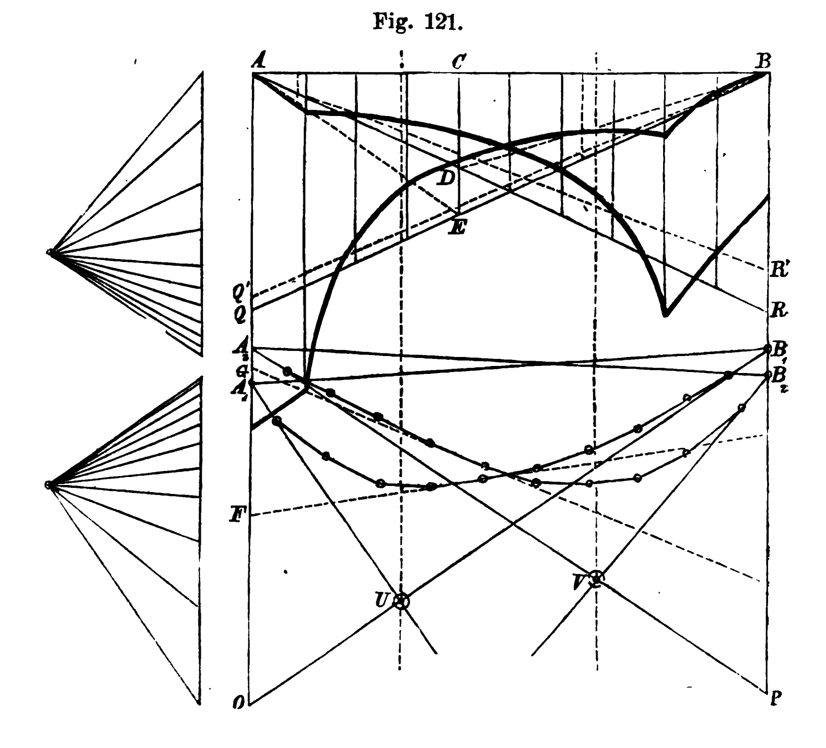
Specielle Belastungsweisen.

§. **127. Totale gleichmässige Belastung.** Es ist zweckmässig, für eine totale gleichmässige Belastung jedes einzelnen Feldes die Grössen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ direct zu bestimmen, indem man die einfache Momentenfläche und hiernach die verzerrte einfache Momentenfläche construirt und sodann das $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ bestimmt.

Die Bestimmung der Transversalkräfte und Momente für das Eigengewicht und für eine totale gleichmässige Belastung des ganzen Trägers kann alsdann sofort nach §. 114 mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphe besprochene Modification erfolgen.

§. **128. Belastung durch eine Einzellast.** Eine so einfache Regel für die Belastung durch eine Einzellast, wie für den constanten Querschnitt nach §. 116 lässt sich hier leider nicht angeben. Handelt es

Fig. 121.



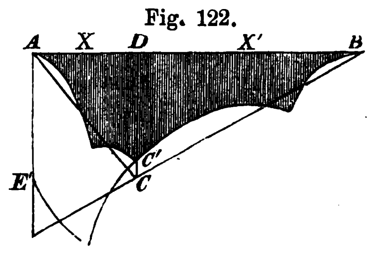
sich um verschiedene Lagen der Einzellast, so dürfte es wohl am zweckmässigsten sein, $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ nach der auf Seite 172 unter *a*) gezeigten Methode zu bestimmen, indem man für jedes Feld die beiden verzerrten Normalflächen und sodann zu jeder das entsprechende Seilpolygon construirt (Fig. 121). Bei Anwendung des Momentenplanimeters ist indess die auf Seite 173 unter *b*) gezeigte Methode einfacher. Ist S' und S'' bestimmt, so bestimmt man $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ nach der Regel 201 (Seite 173); die Multiplication mit x' und x'' kann graphisch oder numerisch erfolgen; da man x' und x'' als einfachen aliquoten Theil von l annimmt, so ist die Multiplication sehr einfach.

Man erhält hierbei zugleich die Lage der Schwerpunkte der verzerrten Normalflächen und hierdurch die Lage der Drittelverticalen und hieraus die Lage der verschränkten Pfeilerverticalen.

Macht man auch hier die Construction Fig. 115, wobei $AL = T'$, $BM = T''$ und CD gleich dem Momente h am Angriffspunkte der Last für den einfachen Träger ist, so ist (wenn wir $\lambda = l$ wählen),

$$\frac{CD}{AL} = \frac{h}{T'} = \frac{\gamma h}{\mathfrak{N}''}.$$

Fig. 122.



Ist das statische Moment der verzerrten einfachen Momentenfläche (in Fig. 122 straffirt) in Beziehung auf die linke Pfeilerverticale $= S'$, so ist $\mathfrak{N}'' = \frac{6}{l^2} S'$. Verlängern wir BC bis zum Durchschnitte E mit der linken Pfeilerverticalen, multipliciren die verticalen Ordinaten des Dreieckes ABE mit $\frac{\mathfrak{W}}{W}$ und bezeichnen das statische Moment der so entstandenen Normalfläche in Beziehung auf die linke Pfeilerverticale mit S und ihre Fläche mit F, so ist $S = Fa'$. Nun aber ist $F = B_1 . \frac{1}{2} AE . l = B_1 . \frac{hl^2}{2x''}$, also $S = B_1 \frac{a'hl^2}{2x''}$; da aber nach §. 122 $3 B_1 a' = \gamma l$ ist, so wird $S = \frac{\gamma l^3 h}{6x''}$, $\gamma h = \frac{6Sx''}{l^3}$, folglich

$$\frac{CD}{AL} = \frac{Sx''}{S'l}.$$

Da nun aber $S > S''$ ist, so ist $\frac{CL}{AL} > \frac{x''}{l}$ oder der Punkt C liegt unterhalb der Linie BL (Fig. 115); ebenso lässt sich nachweisen, dass C unterhalb AM liegt. Hieraus folgt weiter, dass die Punkte G und H (Fig. 115) ausserhalb AB liegen.

Hiernach ergiebt sich nun sofort, dass bei Belastung eines einzelnen Feldes durch eine Einzellast die Wendepunkte O und P (Fig. 117) ausserhalb der Fixpunkte J und K liegen.

§. 129. **Partielle gleichmässige Belastung.** Handelt es sich nur um wenige, etwa nur vier verschiedene Belastungsfälle, so kann man das $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ direct durch Construction der verzerrten Momentenfläche und Construction des entsprechenden Seilpolygones oder Anwendung des Momentenplanimeters bestimmen. Bei einer grösseren Anzahl von Belastungsfällen benützt man am besten die für die Einzellast gefundenen Resultate in der auf Seite 173 unter 2) gezeigten Weise. Hat man das $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ für totale Belastung direct bestimmt, so hat man eine Controle, indem sich die $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ für linke und rechte Belastung zu den $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ für totale Belastung ergänzen müssen.

§. 130. **Maximal-Transversalkräfte.**

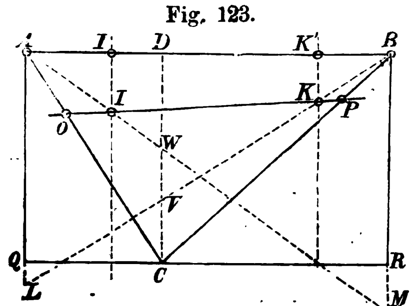
a) **Gefährlichste Belastungsweise.** Das fragliche Feld sei zunächst durch eine Einzellast belastet. Wie in §. 99 (Seite 180) lässt sich behaupten, dass das Moment am Angriffspunkte der Last negativ ist. Die Momente an den Enden des Feldes sind dagegen nach §. 111 positiv. Sonach muss im ersten Kräftepolygone (Fig. 117, Seite 210) der Punkt C_1 innerhalb der Punkte A_1 und B_1 liegen, was sich übrigens auch wie in §. 117 beweisen lässt. Folglich ist Q' stets positiv, Q'' stets negativ. Im Uebrigen lässt sich genau, wie in §. 47 schliessen, so dass sich für die gefährlichste Belastungsweise ganz dieselbe Regel ergiebt, wie für den constanten Querschnitt nach §. 117.

b) **Bestimmung der grössten Transversalkräfte.** Die Construction der grössten Transverskräfte bleibt, nachdem für die einzelnen Belastungsfälle des fraglichen Feldes nach §. 130 die $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ bestimmt sind, dieselbe, wie für den constanten Querschnitt nach §. 119.

§. 131. **Maximalmomente.**

a) **Gefährlichste Belastungsweise.** Das in §. 118 über die gefährlichste Belastungsweise Gesagte gilt auch hier; nur die für Querschnitte, welche ausserhalb der Fixpunkte liegen, gezeigte Construction bedarf einer Modification. In §. 128 wurde nachgewiesen, dass in Fig. 115 und 123 $AL = CD \frac{S'}{S} \frac{l}{x''}$ ist; ist nun V der Durchschnitt der Geraden BL mit CD, so ist $VD = AL \frac{x''}{l} = CD \frac{S'}{S}$. Hierbei ist $S : S'$ das Verhältniss des statischen Momentes der verzerrten Momentenfläche ACB (Fig. 122) für die in C liegende Einzellast zum statischen Momente der Normalfläche ACB in Beziehung auf die linke Pfeilerverticale. Dieses Verhältniss lässt sich leicht aus den den Normalflächen entsprechenden Seilpolygonen entnehmen,

Fig. 123.



wobei es am bequemsten ist, wenn man die Höhe des Rechteckes $ABRQ$ (Fig. 123, welche der Fig. 118 entspricht), gleich dem Abschnitte der Endtangenten des Seilpolygones der Normalfläche auf der entsprechenden Pfeilerverticalen, d. i. $= A_1 O = B_2 P$ (Fig. 121) macht; alsdann ist VD gleich den Summen der dem statischen Momente S' entsprechenden Abschnitten auf der linken Pfeilerverticalen, d. i. $= A_1 F + A_2 G \cdot \frac{CE}{CD}$ (Fig. 121). Die Multiplication von $A_2 G$ mit $\frac{CE}{CD}$ ist leicht vorzunehmen; sie ist in Fig. 121 ausgeführt. In gleicher Weise würde nun auch WD auf der rechten Pfeilerverticalen zu construiren sein.

Verbindet man nun die Punkte I und K, in welchen die Fixpunktverticalen von AW und BV geschnitten werden, durch eine Gerade, so schneidet dieselbe die Geraden AC und BC in den Punkten O und P, in denen das Moment Null wird, wenn in D eine Einzellast liegt. Für die den Punkten O und P entsprechenden Querschnitte muss also für das positive Moment bezüglich die Strecke BD und AD, für das negative Moment bezüglich die Strecke AD und BD belastet sein.

b) **Bestimmung der grössten Momente.** Nachdem für die einzelnen Belastungsfälle des fraglichen Feldes nach §. 130 die $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ bestimmt sind, bleibt die Construction der grössten Momente ganz dieselbe, wie für den constanten Querschnitt nach §. 120.

Literatur.

Chronologisch geordnet.

1. **Rebhann.** Theorie der Holz- und Eisenconstructionen. Wien 1856. — (Behandelt die continuirlichen Träger constanten Querschnittes mit gleichen Feldern nach der älteren Methode, indem zuerst die Stützendrücke bestimmt werden. Dabei ist nur eine Belastung eines jeden Feldes angenommen, und zwar entweder durch eine in der Mitte liegende oder eine totale gleichmässig vertheilte Last.)

2. **Köpke.** Ueber die Dimensionen von Balkenlagen, besonders in Lagerhäusern. — Zeitschr. des Hannover'schen Archit.- u. Ingen.-Ver. 1856. — (Einfache und continuirliche Träger. Zum ersten Male wird hier auf den Vortheil der Senkung der Mittelstützen hingewiesen.)

3. **Scheffler.** Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857. — (Contin. Träger mit totaler gleichmässiger Belastung und unveränderlichen Einzellasten; Vortheil der Senkung der Mittelstützen.)

4. ***Clapeyron.*** *Calcul d'une poutre élastique roposant librement sur des appuis inégalement expèces. — Comptes rendus, 1857.* — (Hierin wird zum ersten Male die bekannte Clapeyron'sche Methode entwickelt, nach welcher zuerst eine Reihe von Gleichungen für die Normalmomente aufgestellt wird. Anwendung auf totale gleichmässige, aber verschiedene Belastung, der einzelnen Felder.)

5. ***Mollinos et Pronnier.*** *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques. Paris. 1857.* — (Behandlung der continuirlichen Träger constanten Querschnittes nach Clapeyron.)

6. **Grashof.** Ueber die relative Festigkeit mit Rücksicht auf deren möglichste Vergrösserung durch angemessene Unterstützung und Einmauerung der Träger bei constantem Querschnitte. — Zeitschr. des deutsch. Ing.-Ver. 1857, 1858, 1859.

7. **Mohr.** Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructionen. — Zeitschrift des hannov. Arch.- u. Ing.-Ver. 1860. — (Theorie der continuirlichen Träger unter Berücksichtigung der relativen Höhenlage der Stützpunkte. Anwendung auf Träger mit 2 und 3 Feldern. Günstigste Senkung der Mittelstützen bei constantem Querschnitte. Nachtheil zufälliger Veränderung der Höhenlage. Einfluss der Auflagerbreiten.)

8. **H.** Continuirliche Brückenträger. — Bornemann's Civil-Ingenieur, 1860. — (Contin. Träger constanten Querschnittes mit drei Oeffnungen. Viele Tabellen für die absoluten Maxima von Q, M und D bei verschiedenen Verhältnissen von l_1 zu l und p zu g und bei verschiedenen Belastungsweisen. Zweckmässigstes Verhältniss der Spannweiten und der Senkung der Mittelstützen bei constantem Querschnitte.)

9. **Winkler**. Beiträge zur Theorie der continuirlichen Brückenträger. — Civil-Ingenieur. 1862. — (Allgemeine Theorie. Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise; zum ersten Male werden allgemeine Regeln für dieselbe aufgestellt. Tabellen der Maximalwerthe von Q, M und D bei verschiedener Anzahl der Felder. Tabellen der Maximalwerthe von Q, M und D für vier Felder bei verschiedenen Verhältnissen von l_1 zu l und p zu g. Günstigstes Verhältniss von l_1 zu l bei constantem Querschnitte.)

10. ***Bresse***. *Cours mécanique appliquée professé a l'école impériale des ponts et chaussées. Seconde Partie. Paris. 1862.* — (Analytische Behandlung der contin. Träger mit constantem Querschnitte; die Transversalkräfte sind nicht berücksichtigt; auch fehlt die exacte Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise bezüglich der Momente in der Nähe der Stützen.)

11. ***Albaret***, *Etude des ponts métalliques à poutres droites reposant sur plus de deux appuis. — Ann. des ponts et chaussées, 1866.* — (Contin. Träger constanten Querschnittes, nach Clepeyron behandelt.)

12. ***Renaudot***, *Mémoire sur le calcul et le contrôle de la resistance des poutres droites à plusiers travées. — Ann. des ponts et chaussées, 1866.* — (Contin. Träger constanten Querschnittes, nach Clapeyron behandelt; mit Tabellen.)

13. **Culmann.** Die graphische Statik. Zürich. 1866. — (Graphische Behandlung der einfachen und continuirlichen Träger mit constantem und variablem Querschnitte; die Bestimmung der Normalmomente ist in analytischer Weise mit Hilfe der Determinanten erfolgt.)

14. **H. Schmidt.** Ueber die Bestimmung der äusseren auf ein Brückensystem wirkenden Kräfte. — Förster's Bauz. 1866. — (Angabe der Grösse der zufälligen Belastung für Eisenbahn- und Strassenbrücken; Bestimmung der äquivalenten gleichmässig vertheilten Last [für das Maximalmoment eines einfachen Trägers]. Angabe des Eigengewichtes und des Winddruckes.)

15. **Grashof**. Die Festigkeitslehre. 1866. — (Allgemeine analytische Behandlung der Träger ohne specielle Anwendung auf Brücken. Continuirliche Träger constanter Festigkeit.)

16. **Winkler.** Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit. Prag. 1867. — (Allgemeine analytische Theorie der contin. Träger mit constantem und variabelem Querschnitte. Anwendung auf totale gleichmässige Belastung. Einfluss einer ungleichen Höhenlage der Stützen.)

17. **Fränkel.** Ueber die ungünstigste Stellung eines Systemes von Einzellasten auf Trägern über eine und über zwei Oeffnungen, speciell auf Trägern von Drehscheiben. — Bornemann's Civilingenieur, 1868.

18. **Mohr.** Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen. — Zeitschr. des hannov. Arch.- u. Ing.-Ver. 1868. — (Hierin wird zum ersten Male die elastische Linie als Seilcurve betrachtet und hierauf die graphische Behandlung der continuirlichen Träger gegründet.)

19. **H. Schmidt.** Betrachtungen über Brückenträger, welche auf zwei und mehr Stützpunkten frei aufliegen, sowie über den Einfluss der ungleichen Höhenlage der Stützpunkte. — Förster's Bauz. 1868.

20. **Collignon.** *Cours de mécanique appliquée aux constructions. Paris. 1869.* — (Contin. Träger constanten Querschnittes mit gleichmässiger Belastung. Andeutungen über die Construction der Normalmomente.)

21. **Laissle und Schübler.** Der Bau der Brückenträger mit besonderer Rücksicht auf Eisenconstructionen. III Auflage. I. Theil. Stuttgart, 1869. — (Behandlung der continuirlichen Träger constanten. Querschnittes nach Clapeyron.)

22. Bericht in Betreff einer zu erlassenden Verordnung über die bei der Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen und Strassen zu beobachtenden Sicherheitsrücksichten. Erstattet von dem aus dem Collegium der Ingenieurschule des k. k. polytechn. Institutes in Wien gewählten Comité. (Nicht im Buchhandel.)

23. Verordnung des österreichischen Handelsministeriums vom 30. August 1870, betreffend die bei Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beachtenden Sicherheitsrücksichten. — Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1870.

24. ***Leygue.*** *Etude sur les surgarges a considérer dans les calculs des tabliers métalliques d'apprês les conditions générales d'exploitation des chemins de fer. Paris. 1871.*

25. **Lippich.** Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von Clapéyron und Mohr begründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges. — Förster's Bauzeitung, 1871. Auch als Separatabdruck. — (Die geometrischen Constructionen sind aus den analytisch abgeleiteten Formeln entwickelt.)

26. ***Seefehlner G.*** *A tobbnyngpontú vasrácstartókról. — A magyar mérrök és építèsz-egylet közlönye. 1871.* (Ungarisch.)

27. **Ritter W.** Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. Ein Beitrag zur graphischen Statik. Zürich, 1871. — (Diese und die vorige Arbeit behandeln den continuirlichen Träger nach Cullmann's neuerer Methode in der auch von uns angewendeten graphischen Weise.)

28. **Ott.** Vorträge über Baumechanik, II. Theil. Prag. 1872. — (Behandelt die analytische Bestimmung der Transversalkräfte und Momente für den einfachen und continuirlichen Träger mit constantem Querschnitte und gleich hohen Stützen.)

Vergleiche auch **Winkler**'s Geschichte der Elasticitätslehre. Technische Blätter; Jahrgang 1871, etc.

In manchen Abhandlungen findet keine Trennung der Behandlung der äusseren und inneren Kräfte statt; die gegebene Literatur wird daher im nächsten Hefte eine Ergänzung finden.

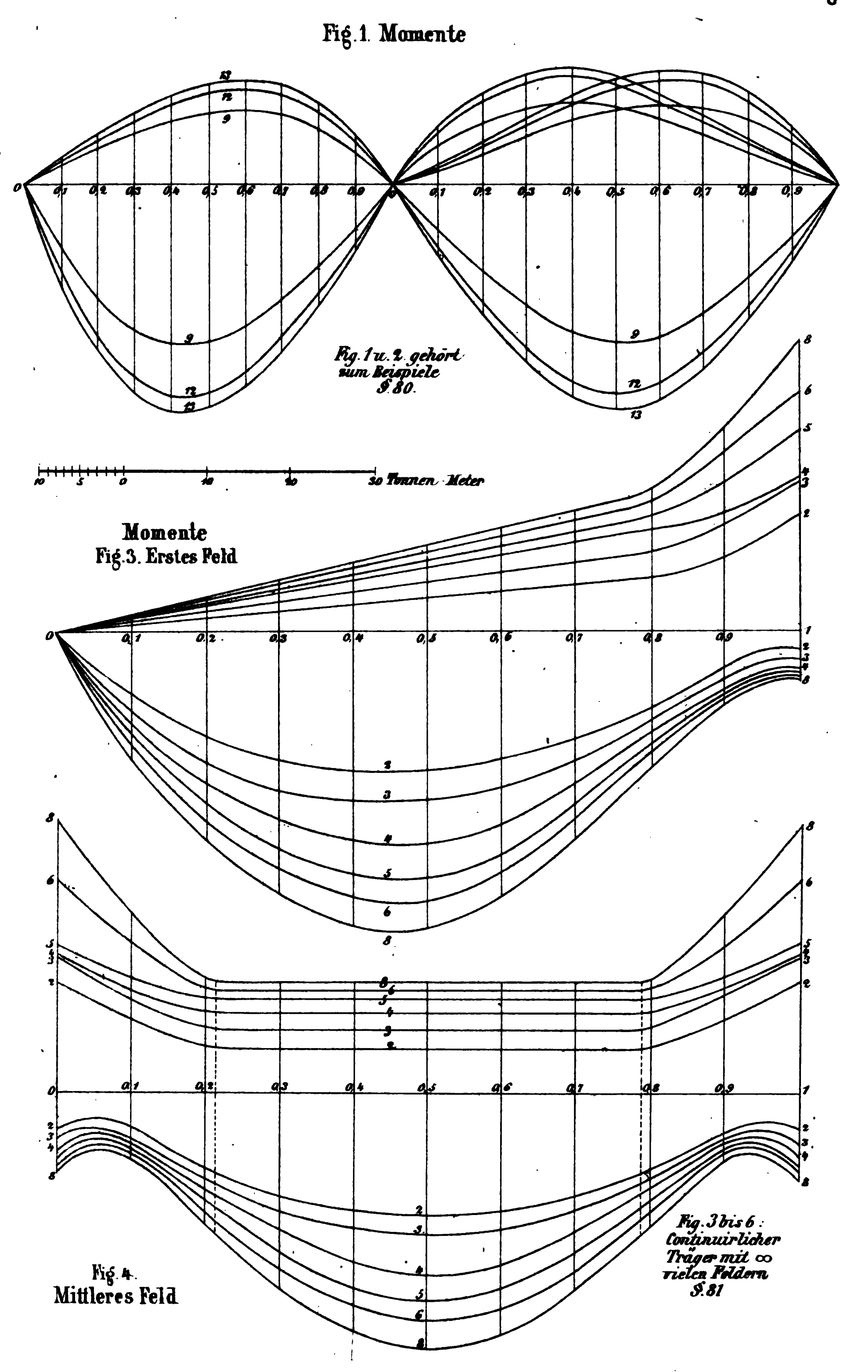
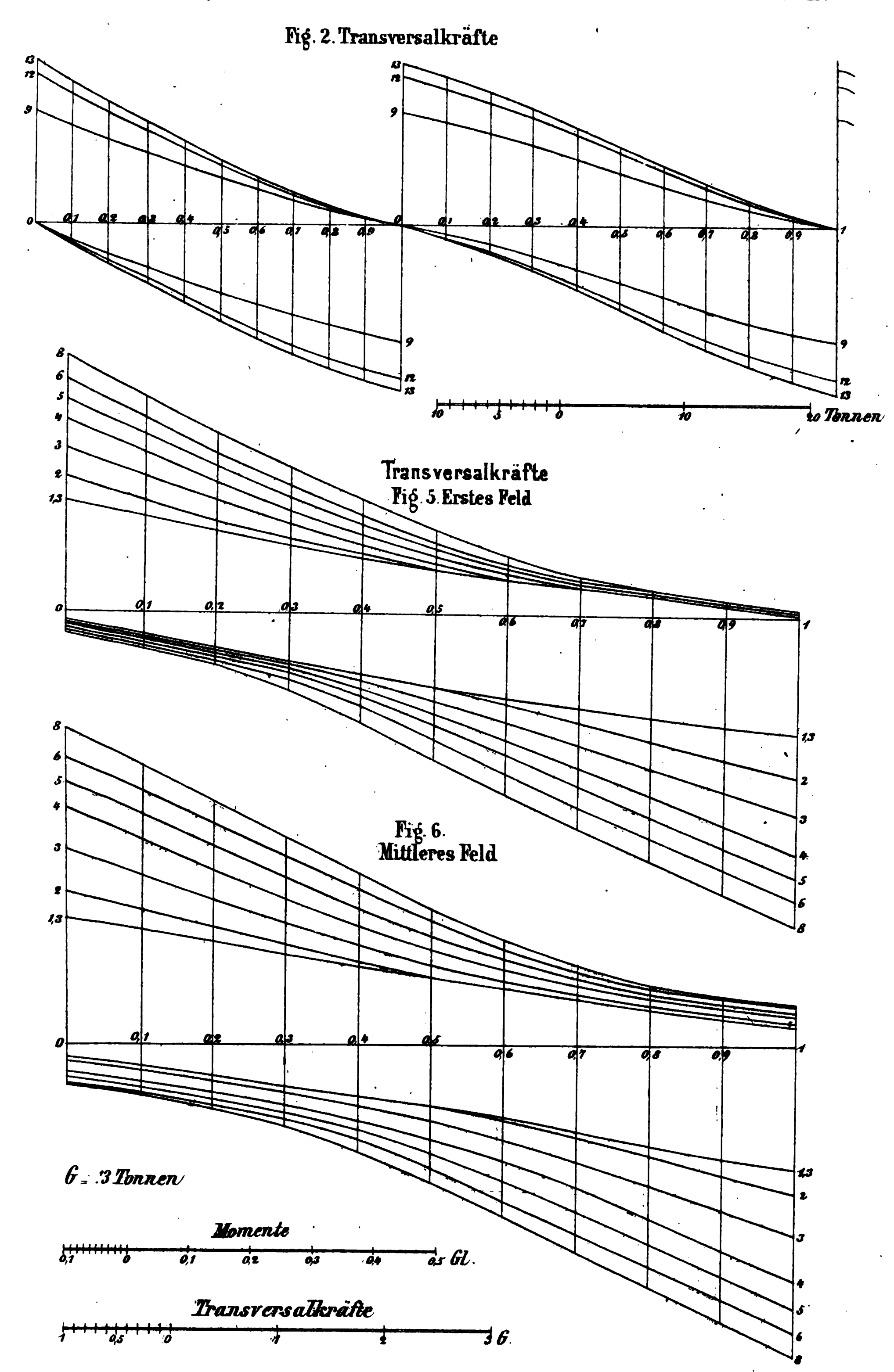


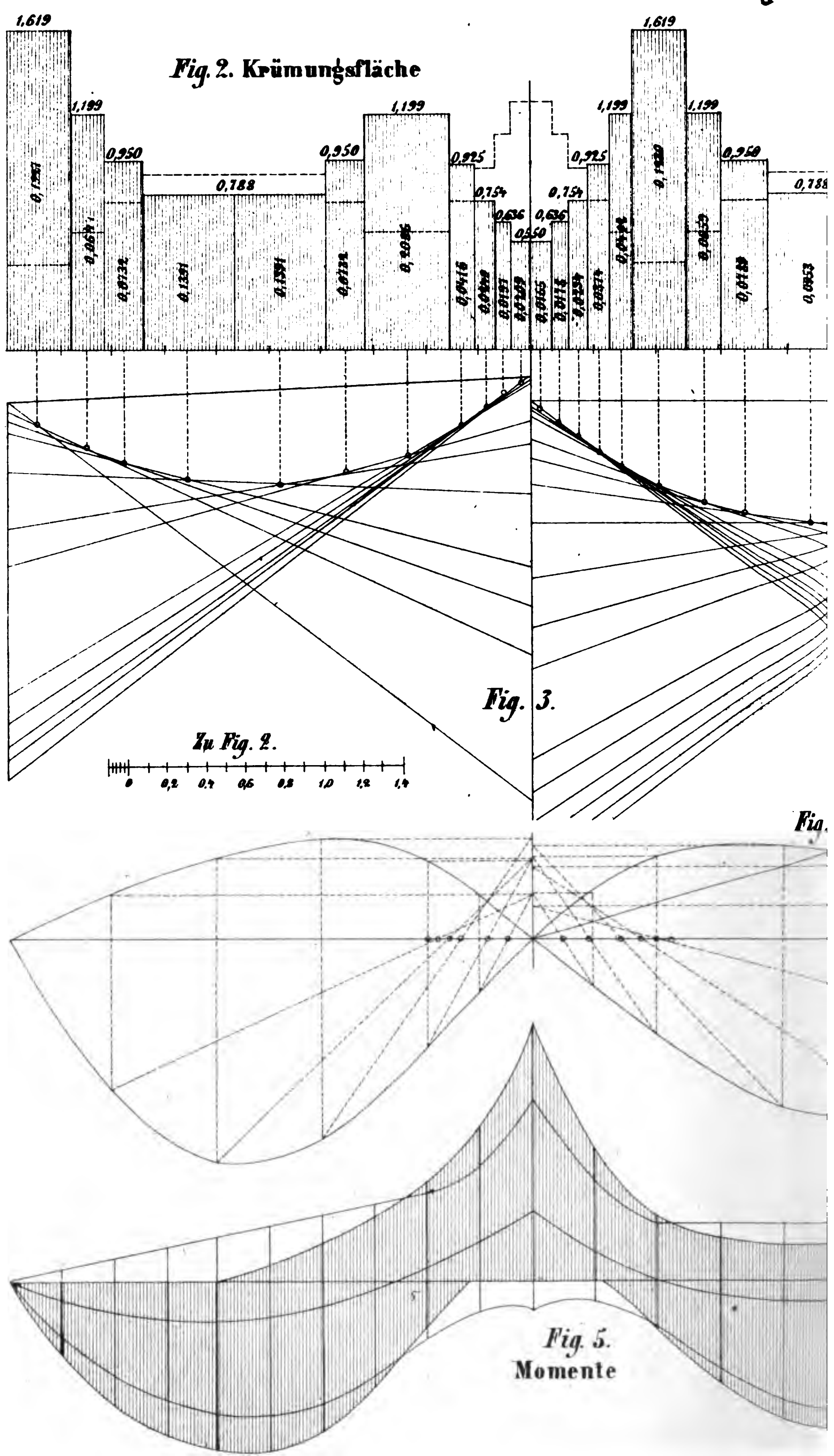
Fig. 1. Momente
Fig. 1 u. 2 gehört zum Beispiele §. 80.
10 5 0 10 20 30 Tonnen-Meter
Momente
Fig. 3. Erstes Feld
Fig. 4. Mittleres Feld
Fig. 3 bis 6: Continuirlicher Träger mit ∞ vielen Feldern §. 81

Lith. Inst. v. l

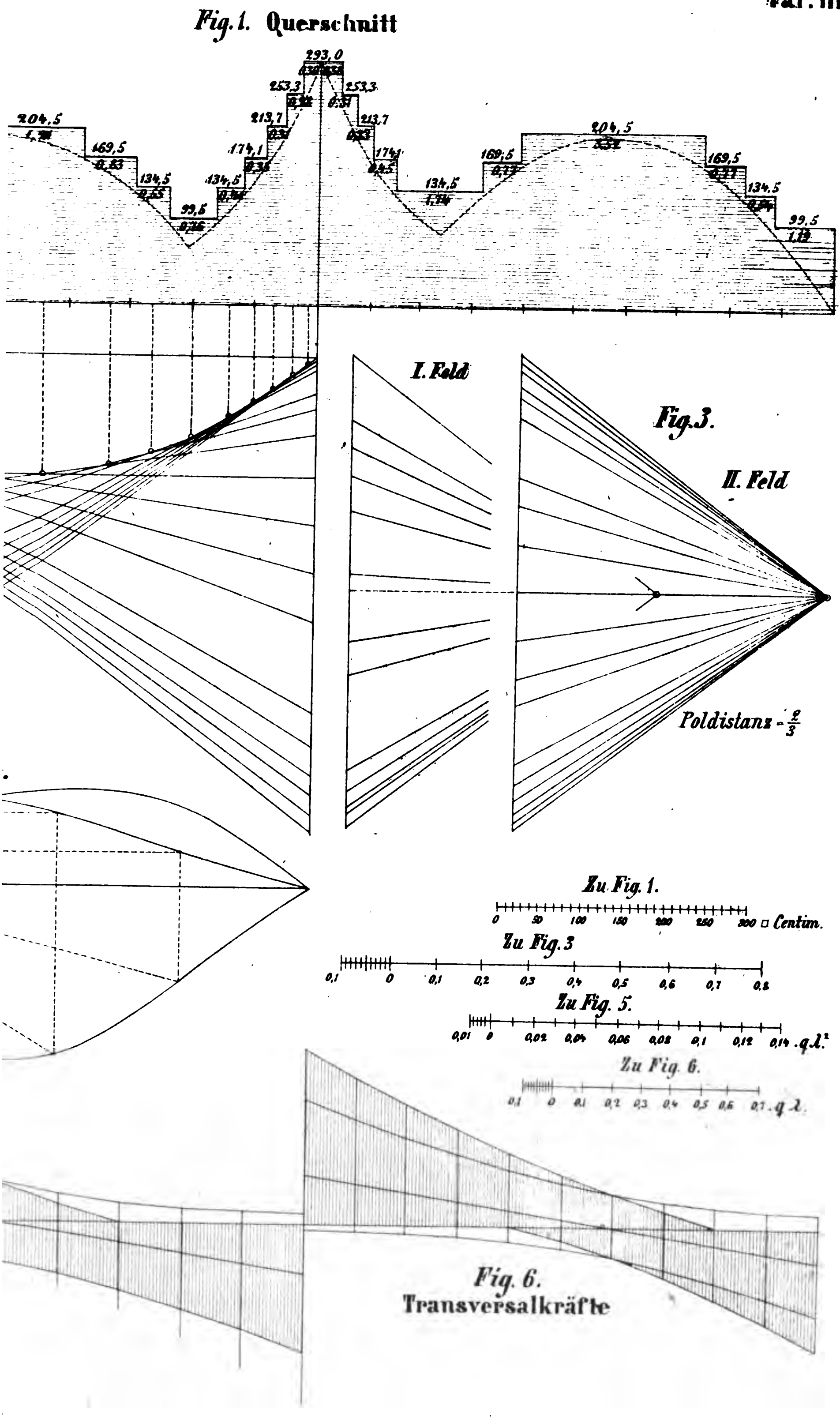

Fig. 2. Transversalkräfte
10 5 0 10 20 Tonnen
Transversalkräfte
Fig. 5. Erstes Feld
Fig. 6.
Mittleres Feld
G = 13 Tonnen
Momente
0,1 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 Gl.
Transversalkräfte
1 0,5 0 1 2 3 G.

...ke, Wien.

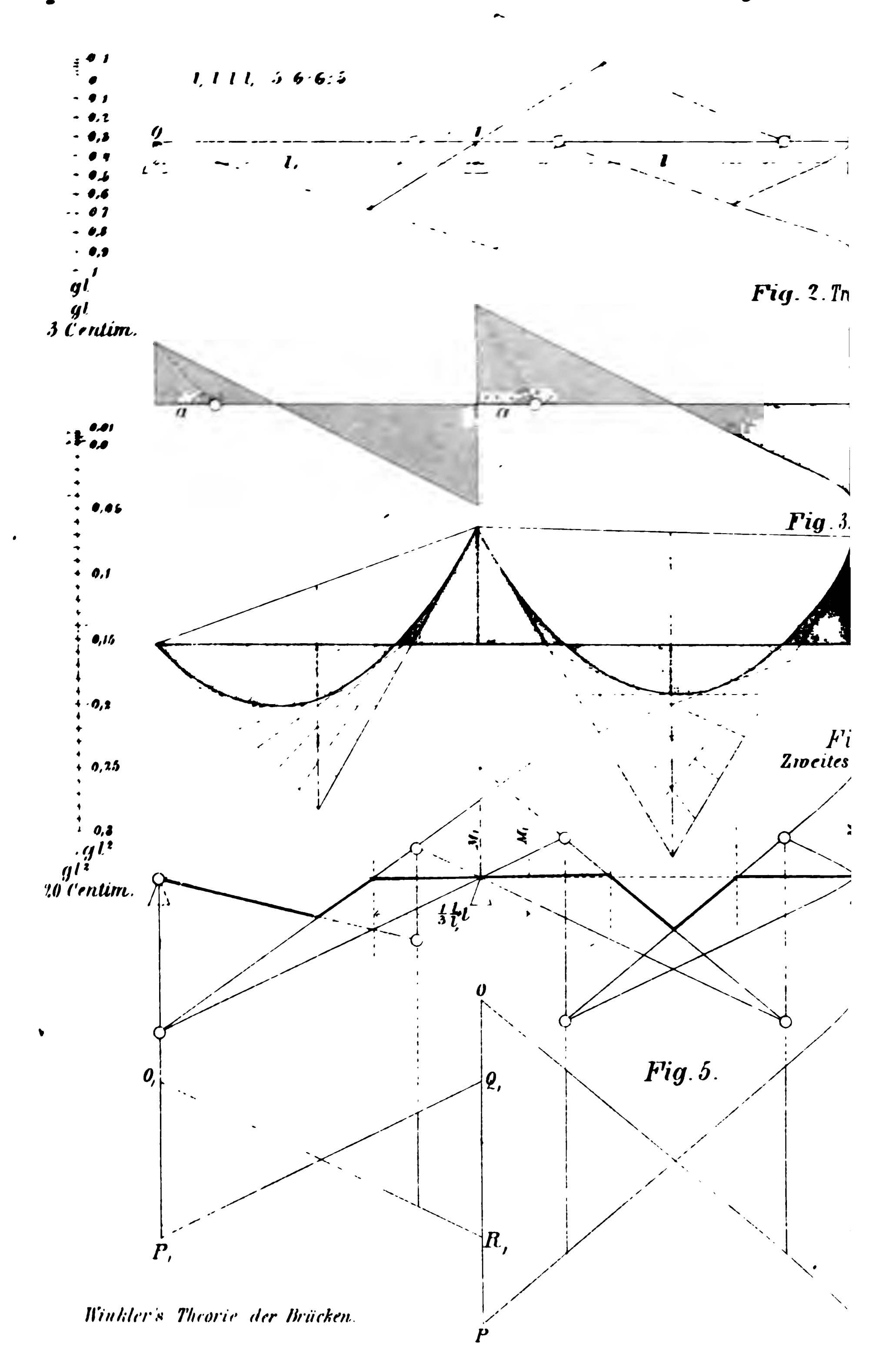
Continuirlicher Träger m



Winkler's Theorie der Brücken.



Lith. Anst. v F. Koke, Wien



Winkler's Theorie der Brücken.

ion der Fixpunkte.

3 4

l l_1

s versalkräfte.

$\lambda = l = 6$ Centim.
$(\frac{l_1}{l})^2 = 0,6944$
$(\frac{l}{l_1})^2 = 1,4400$
$(\frac{l_1}{l})^4 = 0,4823$

a a a

Erste Poldistanz a

$a = \frac{3}{20} l$
$= 0,9$ Cent.

Iomente.

4.
ilpolygon.

Zweite Poldistanz b

$b = \frac{1}{6} l$
$= 1$ Cent.

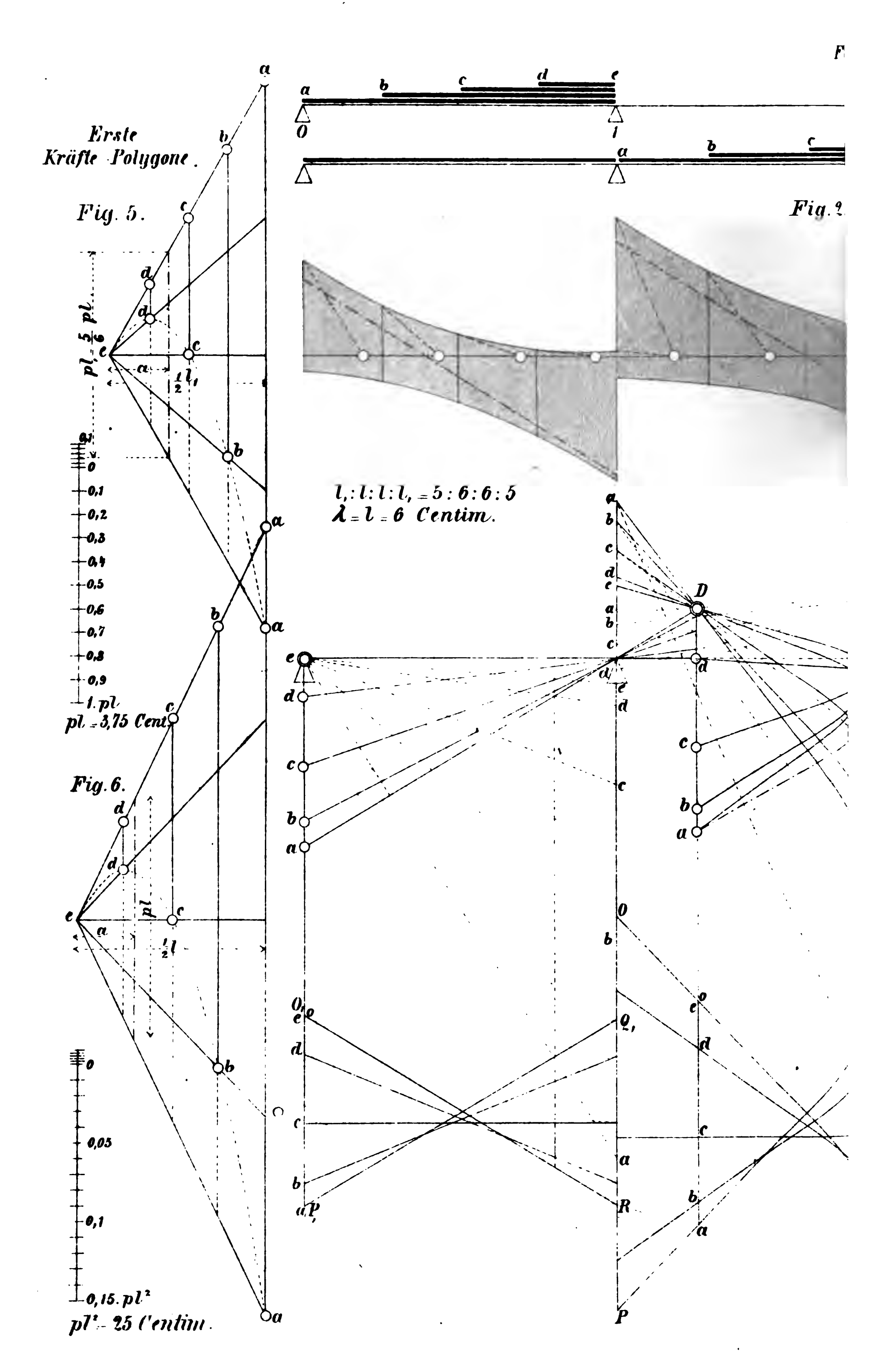
M_3 M_3

$\frac{1}{3} \frac{l}{l_1} l$

Kreuzlinien.

$OP = QR = 0,25\ g l_1^2$
$O_1P_1 = Q_1R_1 = 0,25\ g l^2 (\frac{l_1}{l})^4 = 0,121\ g l^2$.





Winkler's Theorie der Brücken.

. *Belastungsweisen* :

...ximal Transversalkräfte.

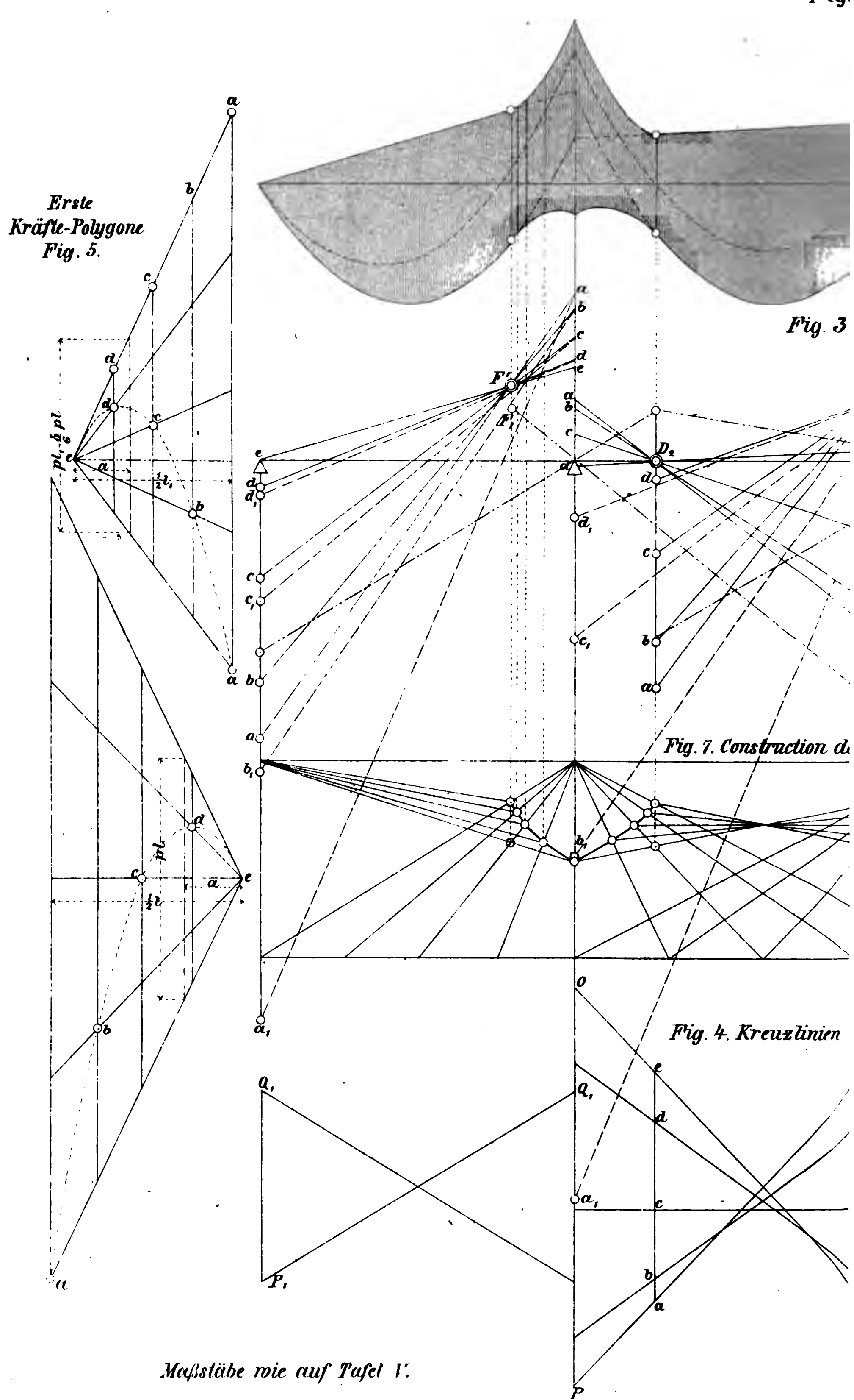
...g. 3. Zweites Seilpolygon.

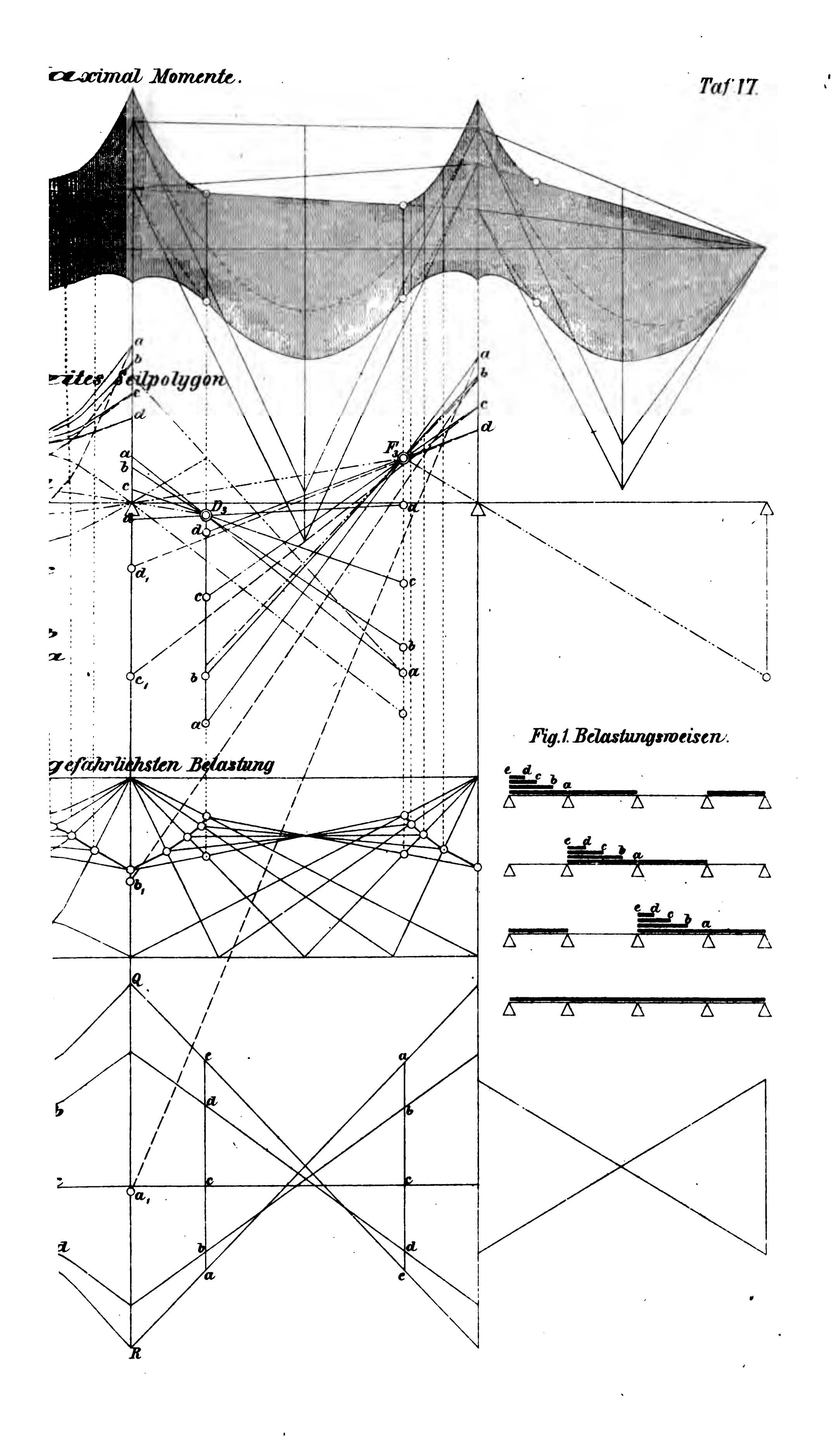
Die Fixpunkte sind von Taf. IV übertragen.

Fig. 4. Kreuzlinien.

Erste Poldistanz $a = \frac{3}{20} l = 0,9$ *Centim.*
Zweite Poldistanz $b = \frac{1}{6} l = 1$ *Centim.*

$OP = QR = 0,25\ pl^2$
$O_1P_1 = Q_1R_1 = 0,25\ pl^2 \left(\frac{l_1}{l}\right)^4 = 0,121\ pl^2$


Fig.
Erste
Kräfte-Polygone
Fig. 5.
Fig. 3
Fig. 7. Construction d
Fig. 4. Kreuzlinien
Maßstäbe wie auf Tafel V.


aximal Momente.
ites Seilpolygon
gefährlichsten Belastung
Fig. 1. Belastungsweisen.

[illegible]

3 6.25 220 445 50[illegible]

[illegible]

Die Vorträge über **Brückenbau** erscheinen in 5 Theilen:

I. Theil. Theorie der Brückenträger.
II. Theil. Brücken im Allgemeinen. — Steinerne Brücken.
III. Theil. Hölzerne Brücken.
IV. Theil. Eiserne Brücken.
V. Theil. Herstellung der Brücken.

Hiervon ist bisher erschienen:

Theorie der Brücken. I. Heft. Aeussere Kräfte gerader Träger. (Mit dieser Lieferung complet).

Eiserne Brücken. II. Heft. Gitterträger, Lager gerader Träger. (In drei Lieferungen complet erschienen). Mit 333 Holzschnitten und 7 lithogr. Tafeln. 5 fl. 20 kr. = 3 Rthlr. 15 Ngr.

Jedem Hefte wird als Anhang ein Literaturbericht beigegeben.

Jedes Heft erscheint in 2 oder 3 Lieferungen von 5 bis 8 Bogen Text mit Holzschnitten und theilweise mit lithographirten Tafeln. **Jedes Heft bildet für sich ein abgeschlossenes Ganze und wird einzeln abgegeben.**